

N O T A S

D E

DINÂMICA DE FLUIDOS



NOVEMBRO DE 2001

NOTAS DE DINÂMICA DE FLUIDOS

NOVEMBRO DE 2001

Agradecimentos aos colegas Dr. Sukaran Ram Patel e Dra. Maria Regina da Silva Aragão pelas sugestões apresentadas.

Célia, Erika Renata, Edyla Raquel e Enilson José, dedico-lhes.

ÍNDICE

Capítulo I - Características Cinemáticas do Escoamento de Fluidos

I.1	Conceito de Fluido	01
I.2	O Contínuo	03
I.3	Descrição Lagrangeana e Euleriana	04
I.4	Derivada Substantiva ou Material	04
I.4.1	Derivada Substantiva como derivada total	04
I.4.2	Derivada Substantiva pela análise integral	05
I.5	Equação da Continuidade de Massa	07
I.6	Divergência Horizontal em Coordenadas Naturais	08
I.6.1	Interpretação da contribuição do termo $\partial V/\partial s$ para a Divergência	09
I.6.2	Interpretação da contribuição do termo $\partial \theta/\partial n$ para a Divergência	09
I.7	Medidas de Rotação num Fluido	10
I.7.1	Vorticidade	10
I.7.1.1	Interpretação da contribuição do termo V/R para a vorticidade	11
I.7.1.2	Interpretação da contribuição do termo $\partial V/\partial n$ para a vorticidade	12
I.7.2	Circulação	12
I.8	Potencial de Velocidade	14
I.9	Função de Corrente	15
I.10	Exercícios	17

Capítulo II - Princípios de Momentum, Calor e Massa

II.1	Conservação da quantidade de movimento linear	19
II.1.1	Equação do movimento para um fluido ideal ou equação de Euler	19
II.1.1.1	Força do gradiente de pressão	19
II.1.1.2	Força Gravitacional	20
II.1.2	Equação de Bernoulli	21

II.2 Teorema da Circulação	22
II.3 Equação da Vorticidade	25
II.4 Equação de Navier-Stokes	26
II.5 Equação de transferência de calor	28
II.6 Equação de transferência de vapor	31
II.7 Exercícios	32
Capítulo III - Processos na Camada Limite Superficial	
III.1 Experiência de Reynolds	34
III.2 O conceito de camada limite	35
III.2.1 Espessura da camada limite	35
III.2.2 Considerações sobre a equação de Navier-Stokes dentro da camada limite laminar para um escoamento permanente	36
III.3 Camada limite térmica	38
III.4 Escoamento turbulento	39
III.4.1 A turbulência medida em relação ao tempo	39
III.4.2 Equação de Reynolds	40
III.4.2.1 Teoria de comprimento de mistura de Prandtl	42
III.4.2.2 Perfil de velocidade num escoamento turbulento	43
III.4.3 Analogia de Reynolds para a temperatura	45
III.4.3.1 Equação de transferência de calor para escoamento turbulento	45
III.4.3.2 Fluxo de calor na camada limite térmica turbulenta	46
III.4.4 Analogia de Reynolds para o vapor	
III.4.4.1 Equação de transferência de vapor na camada limite turbulenta	47
III.4.4.2 Fluxo de vapor na camada limite turbulenta	47
III.5 Exercícios	48
Capítulo IV - Análise Dimensional	
IV.1 Análise Dimensional	50
IV.1.1 Teorema de Buckingham	51

IV.2 Exercícios	53
-----------------	----

Bibliografia e Apêndices

Bibliografia Consultada	54
A.1 Coordenadas Curvilíneas	55
A.1.1 Coordenadas Cilíndricas	56
A.1.2 Coordenadas Esféricas	57
Alfabeto Grego	59

CAPÍTULO I

Características Cinemáticas do Escoamento de Fluidos

I.1 CONCEITO DE FLUIDO

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente quando submetido a uma tensão de cisalhamento, não importando o quão pequena possa ser essa tensão. Uma força de cisalhamento é a componente tangencial da força que age sobre a superfície e quando dividida pela área da superfície dá origem à tensão de cisalhamento média sobre a área. Tensão de cisalhamento num ponto é o valor limite da relação entre a força de cisalhamento e a área, quando a área tende a zero, ou seja:

$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{F_x}{\delta A}. \quad (I.1)$$

Suponhamos uma substância confinada entre duas placas paralelas bem próximas e grandes de modo que as perturbações nas bordas possam ser desprezadas (Figura I.1). A placa inferior é fixa e uma força F é aplicada na placa superior, a qual exerce uma tensão de cisalhamento Fx/A na substância, em que A é a área da placa superior. Se a força Fx movimenta a placa superior com uma velocidade (não nula) constante não importando quão pequena seja a intensidade de Fx , pode-se concluir que a substância entre as duas placas é um fluido.

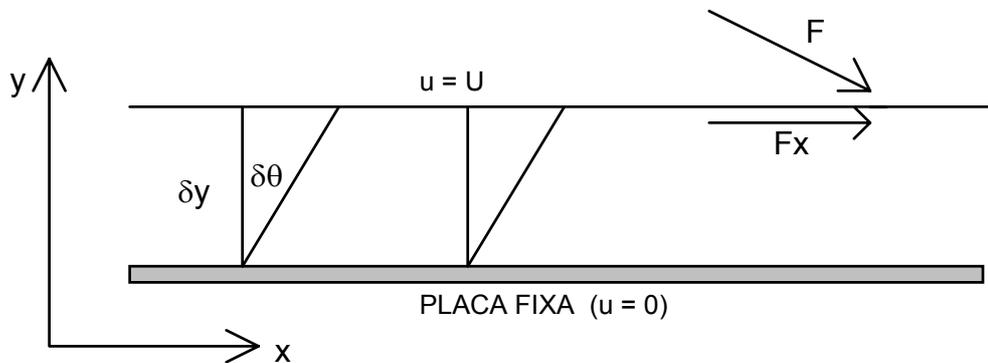


Figura I.1 - Placas paralelas contendo uma substância que se deforma continuamente quando submetida a ação de uma tensão de cisalhamento.

Foi observado experimentalmente que:

$$\tau \propto \frac{\delta \theta}{\delta t} \quad (I.2)$$

sendo $\delta s = \delta \theta \delta y$, tem-se que $\delta \theta = \delta s / \delta y$ em que $\delta s \cong \delta x$ (Figura I.2). Portanto $\tau \propto \delta x / \delta t \delta y$ e uma vez que $\delta u = \delta x / \delta t$ pode-se reescrever I.2 como:

$$\tau \propto \frac{\delta u}{\delta y} \quad (I.3)$$

A Figura I.2 ilustra o resultado obtido, em que um delta de espaço é dado pelo produto de um delta de ângulo pelo raio (no caso o δy).

Foi observado também que a constante de proporcionalidade é uma propriedade inerente do fluido a qual chamou-se de VISCOSIDADE, simbolizada por:

- $\mu \equiv$ Viscosidade dinâmica;
- $\nu \equiv$ Viscosidade cinemática (μ/ρ).

Portanto, no limite tem-se

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \quad (I.4)$$

ou

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (I.5)$$

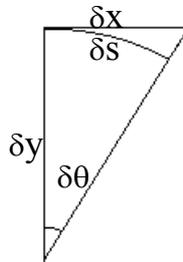


Figura I.2 - Visualização da propriedade trigonométrica.

A equação I.5 é conhecida como Lei de Newton da Viscosidade. Em experiências posteriores, com outros fluidos, observou-se que estes não apresentavam uma relação linear entre a tensão de cisalhamento (τ) e a velocidade de deformação ($d\theta/dt$ ou du/dy) e sim uma do tipo:

$$\tau = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad (I.6)$$

em que n é um número inteiro diferente de 1. Esses fluidos são classificados como não Newtonianos.

Para melhor compreensão, vejamos a classificação mostrada através da Figura I.3 para fluidos e outras substâncias.

São exemplos de fluidos as substâncias no estado líquido e gasoso. A viscosidade de um gás aumenta com a temperatura, mas a viscosidade de um líquido diminui. A variação com a temperatura pode ser explicada examinando-se o mecanismo da viscosidade. A resistência de um fluido ao cisalhamento depende da coesão molecular e da velocidade de transferência da quantidade de movimento molecular. Num líquido, cujas moléculas estão mais próximas que num gás, existem forças de coesão muito maiores que nos gases. A coesão parece ser a causa predominante da viscosidade num líquido e como a coesão diminui com o aumento da temperatura a viscosidade segue o mesmo comportamento. Por outro lado, num gás existem forças de coesão muito pequenas, sua resistência ao cisalhamento é principalmente o resultado da quantidade de movimento molecular que aumenta com o aumento da temperatura com o conseqüente aumento da viscosidade.

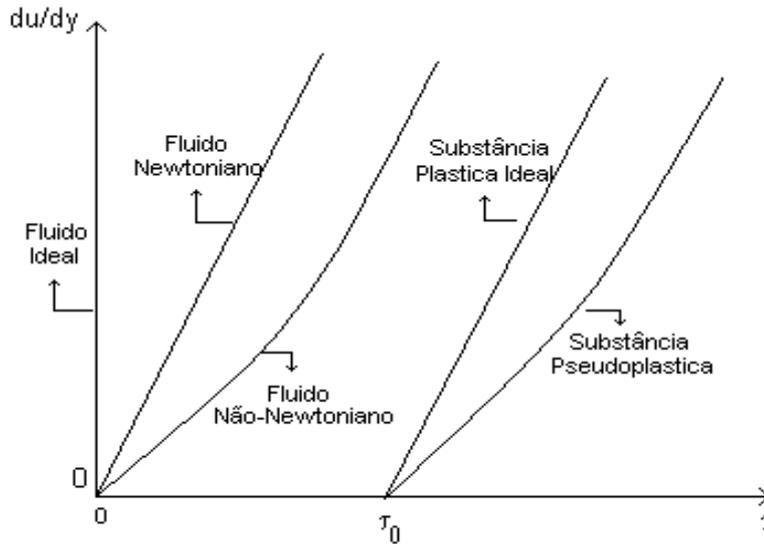


Figura I.3 - Classificação de fluidos.

I.2 O CONTÍNUO

Todos os materiais, evidentemente, são constituídos de átomos → moléculas. Assim, o estudo das propriedades de um fluido a partir do comportamento de suas moléculas consiste no enfoque molecular. O estudo de um fluido a partir do enfoque molecular traz muitas complicações para as equações governantes tornando-as, quase sempre, incapazes de serem solucionadas. Por esta razão é conveniente tratar o fluido que está-se lidando como um meio contínuo.

A hipótese do contínuo consiste em abstrair-se da composição molecular e sua conseqüente descontinuidade ou seja, por menor que venha a ser uma divisão do fluido, esta parte isolada deverá apresentar as mesmas propriedades que a matéria tratada como um todo. A esta pequena parte do fluido costuma-se chamar de Partícula ou Ponto Material.

Com base na hipótese do contínuo, pode-se definir densidade de um fluido em um ponto como sendo o limite da razão entre δm (massa) e δv (volume) quando δv tende para um certo valor limite δv^* . Logo,

$$\rho = \lim_{\delta v \rightarrow \delta v^*} \frac{\delta m}{\delta v}. \quad (I.7)$$

Para gases e líquidos submetidos a condições normais, δv^* é da ordem de 10^{-9} mm^3 . Por exemplo: um volume de 10^{-9} mm^3 de ar nas condições normais de temperatura e pressão, contem aproximadamente $3 \cdot 10^7$ moléculas de ar (número de Avogadro é igual $6,023 \cdot 10^{23}$ moléculas). Portanto, evidencia-se que um volume desta ordem de grandeza é suficientemente pequeno para que em Meteorologia, Engenharia, etc., seja tomado como sendo uma Partícula ou Ponto Material enquanto que a quantidade de moléculas existentes neste volume é suficiente para caracterizar o fluido como um todo.

No caso de gases rarefeitos, a hipótese do contínuo não pode ser assumida em virtude das moléculas estarem dispersas de forma que um volume desta ordem de grandeza pode não conter moléculas suficientes para caracterizar o gás.

A hipótese do contínuo permite estudar as propriedades do fluido através do cálculo diferencial e (ou) integral, uma vez que continuidade é fundamental na teoria do cálculo.

I.3 DESCRIÇÃO LAGRANGEANA E EULERIANA

Estes dois tipos de descrições permitem analisar problemas em mecânica de fluidos de duas formas diferentes: 1) Descrição Lagrangeana consiste em identificar certas partículas do fluido e a partir daí observar variações de propriedades tais como temperatura; velocidade; pressão; etc. ao longo do tempo ou seja, necessita-se conhecer as propriedades das partículas a medida que estas se deslocam no espaço com o passar do tempo. Isto dificulta consideravelmente o estudo de um escoamento. A outra forma, a Euleriana, apresenta vantagens por oferecer maior simplicidade com precisões satisfatórias. 2) A Descrição Euleriana é a mais apropriada para se estudar as propriedades do fluido em escoamento. Este método consiste em fixar-se o tempo e observar-se propriedades do fluido em vários pontos pré-estabelecidos podendo-se assim obter uma "visão" do comportamento do escoamento naquele instante. Repetindo-se estes procedimentos para instantes diferentes, pode-se ter um entendimento do comportamento do escoamento ao longo do tempo ou seja, a tendência do comportamento do escoamento.

Em Meteorologia, por exemplo, o escoamento do ar, em geral, é estudado pelo método Euleriano. As Estações Meteorológicas representam pontos pré-fixados do espaço e para certos instantes determinados pela Organização Meteorológica Mundial (OMM) são feitas observações de parâmetros, tais como: temperatura; pressão; vento; umidade do ar; etc. que irão descrever as características do escoamento atmosférico.

O conceito de trajetória está ligado à Descrição Lagrangeana enquanto que o conceito de linhas de corrente está ligado à Descrição Euleriana.

Trajetória:

$$\begin{cases} dx = u dt \\ dy = v dt \\ dz = w dt. \end{cases} \quad (I.8)$$

Linhas de corrente:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}. \quad (I.9)$$

I.4 DERIVADA SUBSTANTIVA OU MATERIAL

Vejamos aqui dois enfoques diferentes, um utilizando-se do cálculo diferencial e o outro do cálculo integral.

I.4.1 A DERIVADA SUBSTANTIVA COMO DERIVADA TOTAL

Considere a Descrição Euleriana $f=f(x,y,z,t)$ que descreve o campo da propriedade f . O incremento infinitesimal df é dado pela diferencial total como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt \quad (I.10)$$

em que os incrementos dt , dx , dy e dz são arbitrariamente independentes.

Dividindo ambos os membros da equação I.10 por dt , tem-se

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (\text{I.11})$$

uma vez que $u = dx/dt$; $v = dy/dt$ e $w = dz/dt$ a equação I.11 pode ser reescrita como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{I.12})$$

ou, de forma mais compacta, simplesmente por

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla f \quad (\text{I.13})$$

em que $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$. Esta expressão é conhecida como derivada substantiva ou material, em que $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ é simplesmente um operador.

O termo $\partial f / \partial t$ é a taxa de variação local da propriedade f e o termo $\vec{V} \cdot \nabla f$ é a taxa de variação advectiva (advecção) da propriedade f . Portanto a taxa de variação substantiva é dada pela soma da taxa de variação local e da advecção.

I.4.2 DERIVADA SUBSTANTIVA PELA ANÁLISE INTEGRAL

Neste caso iremos utilizar um volume de controle qualquer para a formulação da taxa de variação total em termos de parâmetros integrais.

Seja N o valor de alguma grandeza associada ao sistema no instante t (massa, energia, quantidade de movimento, etc.) e n o valor desta grandeza por unidade de massa. Em $t + \delta t$, (Figura I.4) o sistema constituiu-se dos volumes II e III, enquanto no instante t ocupava os volumes I e II. A variação da grandeza N no sistema, no intervalo de tempo δt é dado por:

$$N_{sis(t+\delta t)} - N_{sis(t)} = \left(\iiint_{II} n\rho \, dv + \iiint_{III} n\rho \, dv \right)_{(t+\delta t)} - \left(\iiint_I n\rho \, dv + \iiint_{II} n\rho \, dv \right)_{(t)} \quad (\text{I.14})$$

rearranjando os termos e dividindo por δt , tem-se

$$\frac{N_{sis(t+\delta t)} - N_{sis(t)}}{\delta t} = \frac{\iiint_{II(t+\delta t)} n\rho \, dv - \iiint_{II(t)} n\rho \, dv}{\delta t} + \frac{\iiint_{III(t+\delta t)} n\rho \, dv}{\delta t} - \frac{\iiint_I n\rho \, dv}{\delta t}. \quad (\text{I.15})$$

O primeiro membro é a taxa média de variação do valor de N no sistema no intervalo de tempo δt . No limite, quando δt tende a zero, pode-se escrever dN/dt .

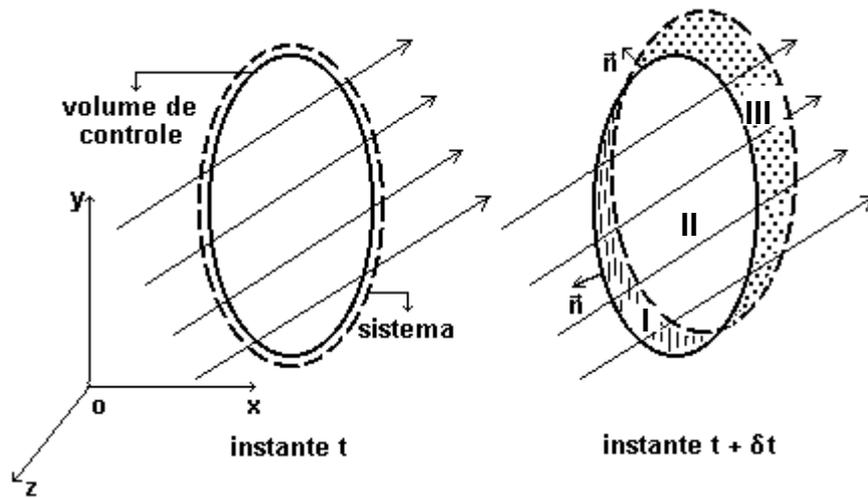


Figura I.4 - Volume de controle e sistema para um escoamento em dois instantes diferentes.

O limite da primeira parcela do segundo membro, relativo ao volume II, é pela definição de derivada parcial escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} n\rho \, dv. \quad (I.16)$$

A parcela seguinte, que é o fluxo de saída de N do volume de controle, no limite pode ser escrita como

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{III(t+\delta t)} n\rho \, dv}{\delta t} = \iint_{A(saída)} n\rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad (I.17)$$

Da mesma forma para o último termo da equação, sendo que o valor negativo indica entrada do fluxo de N no volume de controle (contrário ao vetor unitário \vec{n}). No limite tem-se

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\iiint_{II(t)} n\rho \, dv}{\delta t} = \iint_{A(entrada)} n\rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA. \quad (I.18)$$

Substituindo-se todos os termos na equação I.15 tem-se

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} n\rho \, dv + \iint_{sc} n\rho \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA \quad (I.19)$$

portanto, dN/dt é dado pela soma da taxa de variação de N no volume de controle mais o fluxo resultante de N através da superfície de controle.

I.5 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE DE MASSA

Partindo do princípio de conservação de massa, em que a massa é conservada desde que não haja fonte nem sumidouro desta, tem-se

$$\frac{dm}{dt} = 0. \quad (I.20)$$

Para esse caso o $N \equiv m$ (massa), logo $n = N/m$ de em que se conclui que $n = 1$. Conforme a expressão para derivada substantiva dm/dt é dado por:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho \, dv + \iint_{sc} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (I.21)$$

portanto, na forma integral temos que a equação da continuidade de massa é dada como

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho \, dv + \iint_{sc} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (I.22)$$

sendo o primeiro termo a taxa de variação da massa no volume de controle (taxa de variação local) e o segundo termo o fluxo de massa resultante que entra (negativo) ou sai (positivo) através da superfície de controle e normal a esta.

Aplicando o teorema da divergência de Gauss no segundo termo da equação I.22, esta toma a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho \, dv + \iiint_{vc} \nabla \cdot \rho \vec{V} \, dv = 0 \quad (I.23)$$

ou

$$\iiint_{vc} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} \right) dv = 0. \quad (I.24)$$

A equação da continuidade de massa na forma diferencial é obtida da equação I.24. Como essa integral é zero quem deve ser zero é o integrando. Logo, tem-se

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{V} = 0 \quad (I.25)$$

que desmembrando o segundo termo assume a forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (I.26)$$

ou a forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (I.27)$$

mediante o conceito de derivada substantiva.

Para um fluido homogêneo ($\nabla\rho = 0$) e incompressível ($\partial\rho/\partial t = 0$) a equação I.26 ou I.27 assume a forma

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (I.28)$$

que em termos das componentes da velocidade, fica

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (I.29)$$

O termo $\nabla \cdot \vec{V}$ é chamado de divergência e é representado pelo símbolo δ .

I.6 DIVERGÊNCIA HORIZONTAL EM COORDENADAS NATURAIS

A divergência horizontal é dada por

$$\delta_h = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (I.30)$$

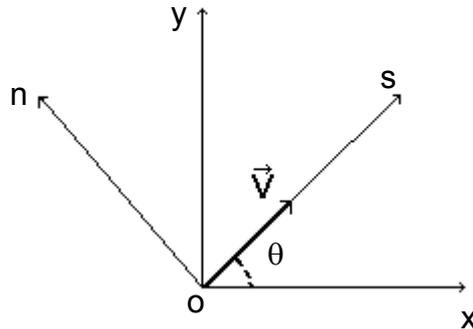


Figura I.5 - Eixos cartesianos x,y e naturais s,n rotacionados de um ângulo θ e vetor velocidade associado.

Com base na Figura I.5 temos que $u = V \cos\theta$, $v = V \sin\theta$ logo, $u = u(V, \theta)$ e $v = v(V, \theta)$. Portanto as variações de u com x e de v com y são dadas por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (I.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (I.32)$$

Obtendo as derivadas correspondentes tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial V}{\partial x} - V \sin\theta \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (I.33)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \text{sen}\theta \frac{\partial V}{\partial y} + V \cos\theta \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (\text{I.34})$$

Observe que quando θ tende para zero ($\theta \rightarrow 0$) tem-se $x \equiv s$ e $y \equiv n$, logo

$$\delta_h = \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial \theta}{\partial n}. \quad (\text{I.35})$$

I.6.1 INTERPRETAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DO TERMO $\partial V/\partial s$ PARA A DIVERGÊNCIA

Considere o escoamento da Figura I.6, onde a intensidade da velocidade (V) é representada pelo tamanho da seta (quanto maior for o tamanho da seta maior será o valor de V). No caso (a) $\partial V/\partial s > 0$ e no caso (b) $\partial V/\partial s < 0$ contribuindo para divergência e convergência (divergência < 0) respectivamente.

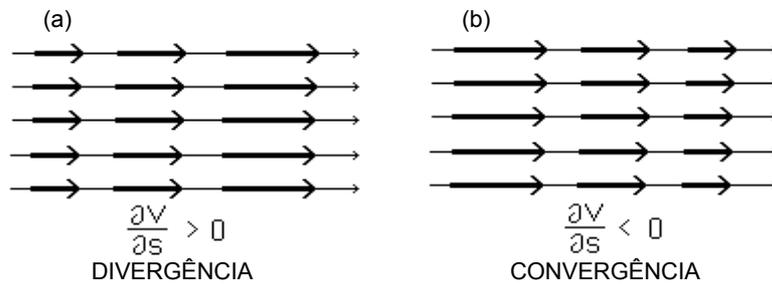


Figura I.6 - Contribuições para (a) divergência (b) convergência.

I.6.2 INTERPRETAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DO TERMO $\partial \theta/\partial n$ PARA A DIVERGÊNCIA

Considere o caso da Figura I.7 onde as linhas de corrente apresentam curvaturas diferentes. Na parte a) $\partial \theta/\partial n < 0$ e na parte (b) $\partial \theta/\partial n > 0$ contribuindo para convergência e divergência respectivamente.

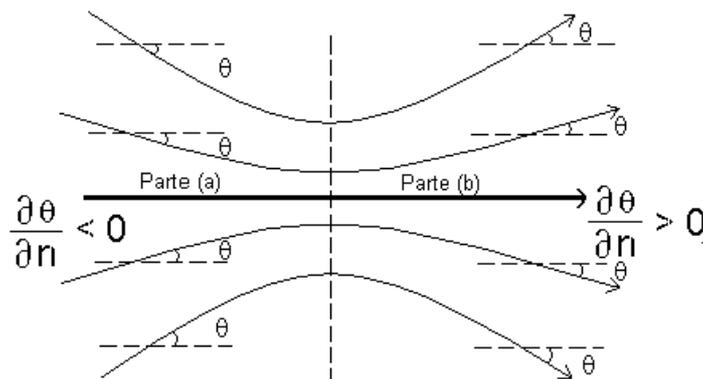


Figura I.7 - Parte (a): convergência. Parte (b): divergência.

I.7 MEDIDAS DE ROTAÇÃO NUM FLUIDO

I.7.1 VORTICIDADE

O rotacional de um campo vetorial qualquer é dado pela aplicação do operador ∇ (nabla) ao campo vetorial sob forma de produto vetorial ou seja, $\nabla \times \vec{F}$. No caso do campo vetorial ser um campo de velocidade

em um escoamento, esta medida indica a rotação existente no escoamento e é chamada de Vorticidade. A vorticidade é duas vezes a velocidade de rotação, logo a Vorticidade é dada por:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{pmatrix} \quad (I.36)$$

Resolvendo, tem-se

$$\nabla \times \vec{V} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (I.37)$$

que representa medidas de rotação num escoamento e cujos eixos de rotação são $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

A componente \vec{k} do rotacional ou seja, a rotação no plano x,y é de fundamental importância no estudo da cinemática de fluidos. Representada pelo símbolo ζ (zeta) pode também ser expressa por

$$\zeta = \vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{V}) \quad (I.38)$$

ou

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (I.39)$$

portanto, a componente vertical da vorticidade é uma medida de rotação para um ponto do plano ou seja é uma medida "microscópica" da rotação num escoamento plano.

Para uma melhor interpretação física da vorticidade (ζ), convém escrevê-la em coordenadas naturais. Lembrando que $u = V \cos \theta$ e $v = V \sin \theta$ (Figura I.5) tem-se $u = u(V, \theta)$ e $v = v(V, \theta)$ e portanto

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (I.40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (I.41)$$

Logo

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \sin \theta \frac{\partial V}{\partial x} + V \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}; \quad (I.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial V}{\partial y} - V \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (I.43)$$

Quando θ tende a zero, $x \equiv s$ e $y \equiv n$. Portanto,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = V \frac{\partial \theta}{\partial s} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial n}. \quad (I.44)$$

Considerando que $\delta s = R \delta \theta$ em que R é o raio de curvatura ver (Figura I.8) logo $\delta \theta / \delta s = 1/R$, o que torna o termo $\partial v / \partial x = V \partial \theta / \partial s$ igual a V/R (a curvatura K é obtida por $K=1/R$). Dessa maneira, a vorticidade toma a seguinte forma

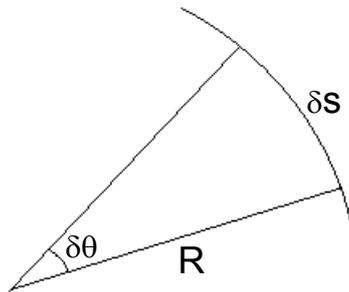


Figura I.8 - $\delta s = R \delta \theta$

$$\zeta = \frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n}. \quad (I.45)$$

I.7.1.1 INTERPRETAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DO TERMO V/R PARA A VORTICIDADE

Considere dois casos de escoamentos com curvatura (Figura I.9). No caso (a) a curvatura está no mesmo sentido do vetor normal unitário e portanto positiva, sendo V o módulo da velocidade \vec{V} a contribuição oferecida para a vorticidade é positiva. No caso (b) a curvatura está no sentido contrário ao vetor normal unitário e portanto negativa, oferecendo uma contribuição negativa para a vorticidade.

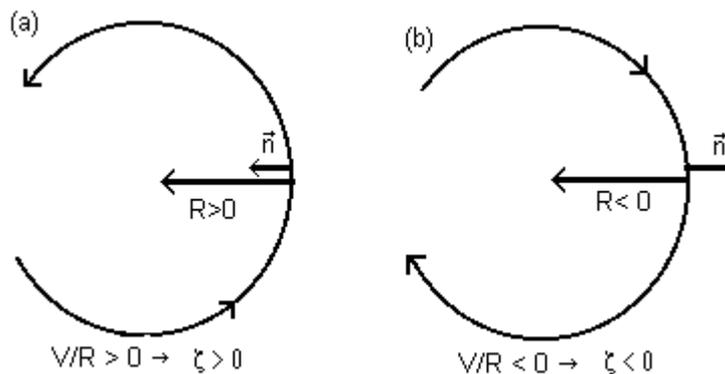


Figura I.9 - Contribuição do termo de curvatura no caso de: (a) vorticidade positiva e b) vorticidade negativa.

I.7.1.2 INTERPRETAÇÃO DA CONTRIBUIÇÃO DO TERMO $\partial V / \partial n$ PARA A VORTICIDADE

Considere um escoamento com cisalhamento conforme mostra a Figura I.10 ($R = \infty$ ou $K = 0$). No caso (a) o termo $-\partial V / \partial n > 0$ contribui para vorticidade positiva (anti-horária), já no caso (b) o termo $-\partial V / \partial n < 0$ contribui para vorticidade negativa (horária).

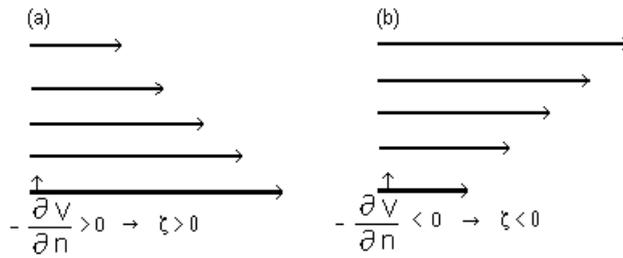


Figura I.10 - Contribuição do cisalhamento lateral para a vorticidade no caso de: a) vorticidade positiva e b) vorticidade negativa.

Pode acontecer casos em que existam curvatura e cisalhamento lateral de forma que essas contribuições se compensem anulando a vorticidade ou se somem tornando-a máxima.

A título de informação adicional, em Meteorologia chama-se vorticidade ciclônica quando a rotação se dá no mesmo sentido do movimento de rotação da terra e vorticidade anticiclônica caso contrário. Logo:

$\zeta > 0 \rightarrow$ Vorticidade Ciclônica no Hemisfério Norte;
Vorticidade Anticiclônica no Hemisfério Sul;

$\zeta < 0 \rightarrow$ Vorticidade Anticiclônica no Hemisfério Norte;
Vorticidade Ciclônica no Hemisfério Sul.

I.7.2 CIRCULAÇÃO

Circulação é uma medida "macroscópica" da rotação num fluido. É definida como a integral de linha do vetor velocidade tangente em cada ponto a uma determinada curva fechada (1) (Figura I.11). Portanto, circulação mede a rotação numa área. A expressão matemática é dada como:

$$C = \oint_l \vec{V} \cdot d\vec{l} \tag{I.46}$$

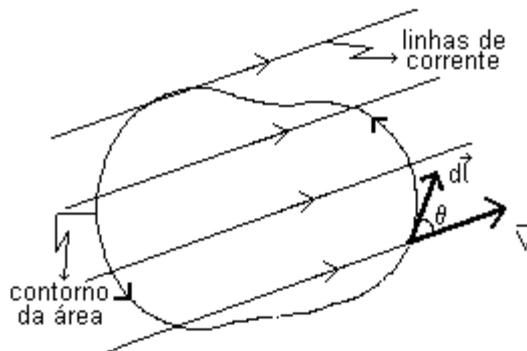


Figura I.11 - Linhas de corrente e curva (linha) fechada para cálculo da circulação.

Por convenção o sentido de integração anti-horário é considerado positivo.

Uma relação entre a circulação e vorticidade pode ser obtida, para tal considere o caso da Figura I.12 que representa uma área quadrada e infinitesimal de lados δx e δy .

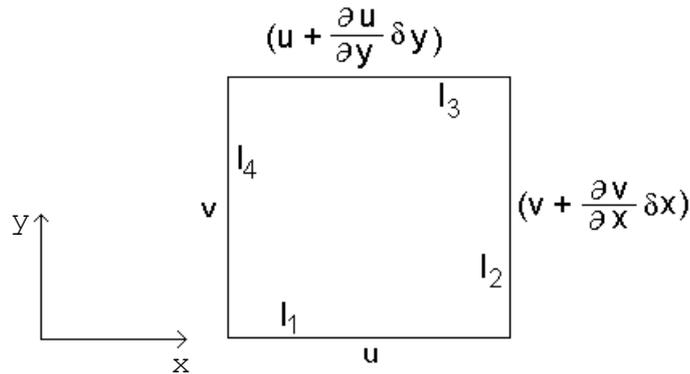


Figura I.12 - Quadrado infinitesimal para definição da relação entre circulação e vorticidade.

Calculando a circulação considerando a Figura I.12 tem-se

$$C = \oint_l \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_l u dx + v dy. \quad (I.47)$$

Considerando cada lado do contorno a equação I.47 fica

$$C = \int_{I_1} u dx + \int_{I_2} (v + \frac{\partial v}{\partial x} dx) dy - \int_{I_3} (u + \frac{\partial u}{\partial y} dy) dx - \int_{I_4} v dy \quad (I.48)$$

rearranjando os termos e eliminando os termos iguais e de sinais contrários, tem-se

$$C = \iint_s (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) dx dy \quad (I.49)$$

ou da forma, uma vez que $\zeta = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$,

$$C = \iint_s \zeta dA. \quad (I.50)$$

Tomando a vorticidade média pode-se escrever a seguinte relação entre circulação e vorticidade

$$C = \bar{\zeta} A \rightarrow \bar{\zeta} = \frac{C}{A}. \quad (I.51)$$

Para o caso da vorticidade num ponto a relação existente é

$$\zeta = \lim_{A \rightarrow \delta A} \frac{C}{A}. \quad (I.52)$$

A relação mostrada anteriormente já é assegurada pelo teorema de Stokes, que para o caso da circulação fica

$$\oint_l \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_s (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{k} dA \quad (I.53)$$

como $\zeta = (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{k}$, pode-se escrever I.53 como

$$\oint_l \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_s \zeta \, dA. \quad (I.54)$$

I.8 POTENCIAL DE VELOCIDADE

Se \vec{V} é um campo de velocidade, tal que seja gerado de um campo escalar ϕ da forma $\vec{V} = -\nabla\phi$, então diz-se que \vec{V} é um campo conservativo e ϕ é o potencial de \vec{V} ou seja, ϕ é o potencial de velocidade. Dessa forma, o campo de velocidade que é um campo vetorial, pode ser convertido num campo escalar.

Um vez que $\vec{V} = -\nabla\phi$, pode-se afirmar que este campo é irrotacional, pois

$$\nabla \times \vec{V} = \nabla \times (-\nabla\phi) = 0. \quad (I.55)$$

A recíproca também é verdadeira, para que exista potencial de velocidade o campo de velocidade tem que ser irrotacional, ou seja

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (I.56)$$

Para o caso de um escoamento plano a condição de irrotacionalidade é simplesmente $\partial v/\partial x = \partial u/\partial y$, que é também a condição para que $u dx + v dy$ seja uma diferencial exata ou total, digamos $d\phi$, logo

$$u dx + v dy = -\frac{\partial \phi}{\partial x} dx - \frac{\partial \phi}{\partial y} dy. \quad (I.57)$$

O sinal negativo é uma convenção que faz com que o valor de ϕ decresça no sentido da velocidade.

Comparando os termos da equação I.57 tem-se

$$-\frac{\partial \phi}{\partial x} = u \quad \text{e} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial y} = v. \quad (I.58)$$

O que leva à expressão

$$\vec{V}_\phi = -\nabla\phi. \quad (I.59)$$

Isso prova a existência de uma função potencial ϕ tal que sua derivada em relação a qualquer direção é a componente da velocidade nessa direção.

A figura I.13 exemplifica a direção e sentido do vetor velocidade potencial num campo da função potencial.

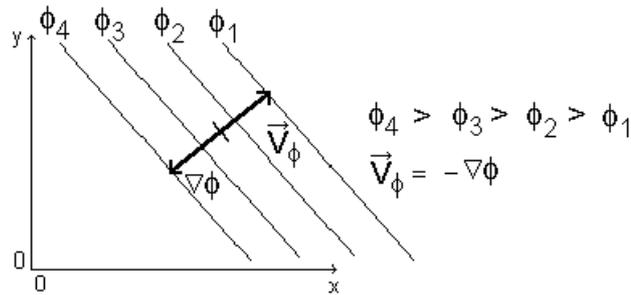


Figura I.13 - Potencial de velocidade e vetor velocidade (parte irrotacional).

I.9 FUNÇÃO DE CORRENTE

Da equação das linhas de corrente para um movimento horizontal,

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \quad (I.60)$$

tem-se que $vdx - udy = 0$. Sendo ψ uma função de corrente, para $\psi = \text{constante}$ pode-se escrever

$$vdx - udy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (I.61)$$

portanto, comparando os termos da equação I.61 conclui-se que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = v; \quad -\frac{\partial \psi}{\partial y} = u. \quad (I.62)$$

Nesse caso $\nabla \cdot \vec{V} = 0$ ou seja, o escoamento é não divergente.

Numa forma vetorial, pode-se escrever que o campo da velocidade não divergente é dado por

$$\vec{V}_\psi = \vec{k} \times \nabla \psi \quad (I.63)$$

em que \vec{k} é o vetor unitário na direção vertical.

A figura I.14 exemplifica a direção e sentido do vetor velocidade num campo da função de corrente

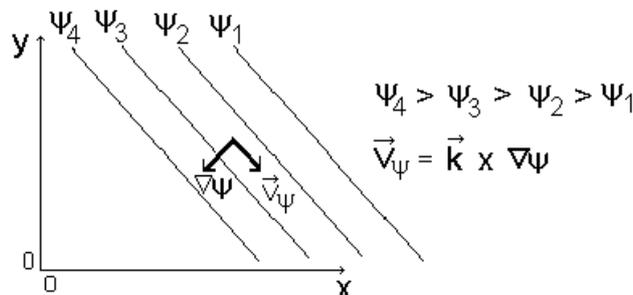


Figura I.14 - Função de corrente e vetor velocidade (parte não divergente)

Equacionando as expressões correspondentes das velocidades envolvidas , a função de corrente e o potencial de velocidade apresentam as seguintes relações

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (I.64)$$

Portanto, se ϕ ou ψ for conhecida, pelas relações I.64 pode-se obter a outra função.

Um campo de velocidade \vec{V} é composto por

$$\vec{V} = \vec{V}_{\psi} + \vec{V}_{\phi} \quad (I.65)$$

em que \vec{V}_{ψ} e \vec{V}_{ϕ} são as partes não divergente e irrotacional respectivamente, tal que

$$\nabla \cdot \vec{V}_{\psi} = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times \vec{V}_{\phi} = 0 \quad (I.66)$$

portanto, o campo de velocidade horizontal pode ser expresso em termos de suas componentes cartesianas como

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (I.67)$$

Conseqüentemente, a vorticidade e a divergência tomam as formas

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = \nabla^2 \psi; \quad (I.68)$$

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi = -\nabla^2 \phi. \quad (I.69)$$

As linhas de potencial de velocidade e de função de corrente formam um sistema ortogonal. Para verificar a relação de ortogonalidade, basta mostrar que as inclinações das linhas de corrente e de potencial são recíprocas negativas em qualquer interseção, ou seja

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\phi=cte} = - \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\psi=cte} \right]^{-1} \quad (I.70)$$

I.10 EXERCÍCIOS

1 - Uma tensão de cisalhamento de 4 dinas/cm^2 causa num fluido Newtoniano uma velocidade de deformação angular de 1 rad/seg. Qual é a viscosidade do fluido.

2 - Analise quais as dimensões de viscosidade dinâmica e viscosidade cinemática.

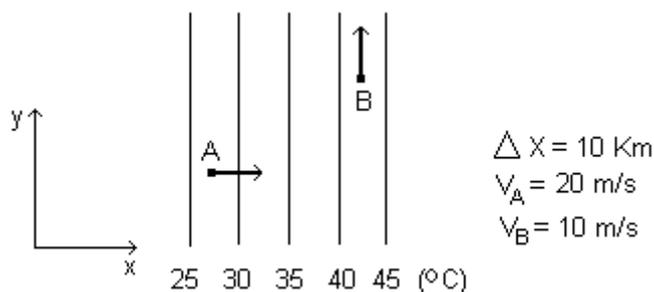
3 - Calcule o número de moléculas encontradas num volume de 10^{-9} mm^3 de ar nas condições normais de temperatura e pressão.

4 - Dado o campo de velocidade por $u = 2x$ e $v = 2y$, obter as equações paramétricas da trajetória e a equação das linhas de corrente. Compare-as.

5 - Explique fisicamente o teorema de Gauss para o caso de

$$\iint_{sc} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \iiint_{vc} \nabla \cdot \rho \vec{V} dv.$$

6 - Calcule a advecção de temperatura nos pontos A e B da figura abaixo.



7 - Dê o conceito de a) fluido compressível e incompressível; b) fluido ideal ou perfeito; c) escoamento permanente e escoamento variado.

8 - Calcule a densidade média da Terra.

9 - Classifique as substâncias segundo a relação apresentada abaixo

(a)	τ	0	4	8	10	12
	du/dy	0	2	4	5	6
(b)	τ	0	2	3	4	5
	du/dy	0	4	9	16	25

10 - Mostre que sendo $\vec{V} = V\vec{t}$, em que \vec{t} é o vetor tangente unitário, a aceleração em coordenadas naturais é composta de uma aceleração tangencial e uma aceleração centrípeta da forma

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{t} + V^2 K\vec{n}$$

em que K é a curvatura ($K = 1/R$) e \vec{n} é o vetor normal unitário.

11 - Dado o campo de velocidade por $u = 2xy + 3$ e $v = x^2y$ calcular a divergência e a vorticidade no ponto $x = 1$ e $y = 1$.

12 - Verifique se o campo de velocidade horizontal dado por

$$u = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad v = \frac{-2x}{x^2 + y^2}$$

satisfaz a equação da continuidade de massa para um fluido incompressível.

13 - Os valores da divergência horizontal para vários níveis, obtidos com base nos dados de uma radiossondagem, são dados abaixo.

Pressão (hPa)	divergência (10^{-5} seg^{-1})
1000	0,9
850	0,6
700	0,3
500	0,0
300	-0,6
100	-1,0

Calcular a velocidade vertical para cada nível, assumindo uma atmosfera isotérmica com $T = 200 \text{ K}$ e condição de contorno dada por $W = 0$ para 1000 hPa.

14 - Qual é a circulação em torno de um quadrado de 1000 Km de aresta, para um escoamento que decresce em magnitude na direção positiva do eixo y à razão de $10 \text{ m} \cdot \text{seg}^{-1} / 500 \text{ Km}$.

15 - Escreva a divergência e a vorticidade em coordenadas naturais e explique a contribuição de cada termo isoladamente.

16 - O potencial de velocidade de um escoamento plano é $\phi = y + x^2 - y^2 + cte$. Determine a função de corrente desse escoamento.

17 - A função de corrente de um escoamento plano é $\psi = 9 + 6x - 4y + 7xy$. Determine o potencial de velocidade ϕ .

18 - Dada a função de corrente por $\psi(x, y) = 2 \cos(y) + \cos(2x)$. Obter a vorticidade para o ponto $x=0$ e $y=0$.

19 - Obter o campo de $\psi(x, y)$ e o campo de $\zeta(x, y)$ relacionados com a função dada no problema anterior. Considere os intervalos: $0 \leq x \leq 2\pi$ e $0 \leq y \leq 2\pi$.

20 - Mostre que as linhas de potencial de velocidade e de função de corrente, formam um sistema ortogonal de coordenadas.

CAPÍTULO II

Princípios de Momentum, Calor e Massa

II.1 CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO LINEAR

Desprezando-se as forças eletromagnéticas e eletroquímicas, as principais forças que agem num fluido são: força devido ao gradiente de pressão (\vec{F}_p), força gravitacional (\vec{F}_G) e força viscosa (\vec{F}_v).

O princípio de conservação da quantidade de movimento linear diz que: a taxa de variação substantiva da quantidade de movimento é igual ao somatório das forças que agem num fluido, logo

$$\frac{dm\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F} \quad (\text{II.1})$$

em que, $m\vec{V}$ é a quantidade de movimento linear e $\sum \vec{F}$ é a força resultante que age no fluido. Observe que essa expressão corresponde a segunda lei de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) formulada na mecânica clássica.

II.1.1 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA UM FLUIDO IDEAL OU EQUAÇÃO DE EULER

Como se trata de um fluido ideal, a viscosidade é nula ($\mu = 0$) logo, não existe força viscosa atuando, existem somente as forças devido ao gradiente de pressão e à atração gravitacional.

Para se obter a variação substantiva da quantidade de movimento linear tem-se que: $N = m\vec{V}$, como $n = N/m$ conclui-se que $n = \vec{V}$. Substituindo-se na expressão que dá a variação substantiva, expressa por

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho n dv + \iint_{sc} \rho n \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.2})$$

assume a forma

$$\frac{dm\vec{V}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho \vec{V} dv + \iint_{sc} \rho \vec{V} \vec{V} \cdot \vec{n} dA. \quad (\text{II.3})$$

Para se obter a equação em sua forma final, resta saber a expressão das forças devido ao gradiente de pressão e à atração gravitacional.

II.1.1.1 FORÇA DO GRADIENTE DE PRESSÃO

Esta força existe devido a diferença de pressão entre pontos do fluido. Logo, expressa em termos do gradiente de pressão tem a forma

$$\vec{F}_p = -\iiint_{vc} \nabla p dv \quad (\text{II.4})$$

onde o sinal negativo indica que essa força atua no sentido contrário ao gradiente de pressão ∇p .

II.1.1.2 FORÇA GRAVITACIONAL

Esta força é obtida do produto da massa pela aceleração da gravidade (\vec{g}). Para um volume qualquer esta força pode ser expressa como

$$\vec{F}_G = \iiint_{vc} \rho \vec{g} dv, \quad (\text{II.5})$$

em que $\vec{g} = -g \vec{k}$ é o vetor aceleração da gravidade e atua no sentido contrário ao vetor unitário \vec{k} (vertical).

Retornando à questão da equação II.1 e considerando o fluido incompressível ($\rho = cte.$) pode-se escrever a equação com a introdução das forças expressas anteriormente. Portanto,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \vec{V} dv + \rho \iint_{sc} \vec{V}\vec{V} \cdot \vec{n} dA = - \iiint_{vc} \nabla p dv + \rho \iiint_{vc} \vec{g} dv \quad (\text{II.6})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \vec{V} dv + \iint_{sc} \vec{V}\vec{V} \cdot \vec{n} dA = - \frac{1}{\rho} \iiint_{vc} \nabla p dv + \iiint_{vc} \vec{g} dv \quad (\text{II.7})$$

que expressa a equação do movimento para um fluido ideal e incompressível, chamada de equação de Euler do movimento.

Aplicando o teorema da divergência de Gauss ao segundo termo do lado esquerdo de II.7 e rearranjando os termos tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \vec{V} dv + \iiint_{vc} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} dv + \frac{1}{\rho} \iiint_{vc} \nabla p dv - \iiint_{vc} \vec{g} dv = 0 \quad (\text{II.8})$$

como a soma das integrais é igual a integral da soma dos integrandos, tem-se

$$\iiint_{vc} \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} \right] dv = 0. \quad (\text{II.9})$$

Para se obter a equação de Euler na forma diferencial, basta considerar que sendo esta integral de volume igual a zero então quem deve ser nulo é o integrando. Logo,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} = 0 \quad (\text{II.10})$$

ou apresentada numa forma mais usual, por

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}. \quad (\text{II.11})$$

Lembre-se que $\partial \vec{V}/\partial t$ é a taxa de variação local do vetor velocidade e $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$ é a taxa de variação advectiva, ambas também denominadas acelerações inerciais. Os termos $-1/\rho \nabla p$ e \vec{g} são as forças do gradiente de pressão e gravitacional, ambas por unidade de massa.

A equação II.11 é uma equação vetorial e portanto pode ser decomposta em suas componentes cartesianas na forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (\text{II.12})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g; \quad (\text{II.14})$$

ou utilizando o conceito de derivada substantiva como

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g; \quad (\text{II.17})$$

em que $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ é um operador que dá a variação substantiva.

Vale salientar que, quando é suposto o fluido estático ou seja, em repouso, não existem acelerações em nenhuma das direções, e portanto, du/dt , dv/dt e dw/dt são nulos. Assim, as equações II.15 a II.17 restringem-se a

$$\partial p = -\rho g \partial z \quad (\text{II.18})$$

que é a equação para o balanço hidrostático ou equação hidrostática.

II.1.2 EQUAÇÃO DE BERNOULLI

A equação de Bernoulli é uma caso particular da equação de Euler, ou seja, é obtida pela integração da equação de Euler ao longo de uma linha de corrente para o caso de um escoamento permanente e potencial ($\nabla \times \vec{V} = 0$).

Portanto, considerando a equação II.11 no caso de um escoamento permanente ($\partial \vec{V}/\partial t = 0$) tem-se

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}. \quad (\text{II.19})$$

Aplicando a seguinte propriedade vetorial, em que $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = 1/2 \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V}) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V})$ que no caso de irrotacionalidade reduz-se a $(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = 1/2 \nabla(\vec{V} \cdot \vec{V})$, a equação II.19 toma a forma

$$\frac{1}{2} \nabla V^2 + \frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{g} = 0. \quad (\text{II.20})$$

Integrando II.20 ao longo de uma linha de corrente (l) na forma

$$\frac{1}{2} \int_l \nabla V^2 \cdot d\vec{l} + \frac{1}{\rho} \int_l \nabla p \cdot d\vec{l} + \int_l g \vec{k} \cdot d\vec{l} = \int_l 0 \quad (\text{II.21})$$

ou

$$\frac{1}{2} \int_l d(V^2) + \frac{1}{\rho} \int_l dp + \int_l g dz = cte. \quad (\text{II.22})$$

Desta forma, tem-se que a equação de Bernoulli é dada por

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = cte. \quad (\text{II.23})$$

Em que: $1/2 V^2 \equiv$ energia cinética por unidade de massa; $gz \equiv$ energia potencial por unidade de massa e $1/\rho p \equiv$ energia de pressão por unidade de massa.

A equação de Bernoulli expressa uma lei de conservação das energias cinética, potencial e de pressão.

II.2 TEOREMA DA CIRCULAÇÃO

Seja a equação do movimento para um fluido incompressível e não viscoso (equação de Euler) na forma

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}. \quad (\text{II.24})$$

Uma vez que o campo gravitacional é um campo conservativo, este admite função potencial e pode ser escrito como $\vec{g} = -\nabla\phi$ em que ϕ é o geopotencial ($\phi = gz$), logo

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla\phi. \quad (\text{II.25})$$

Tomando a integral de linha da equação II.25 em um circuito fechado, tem-se

$$\oint_l \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = -\oint_l \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{l} - \oint_l \nabla\phi \cdot d\vec{l}. \quad (\text{II.26})$$

Analisando o integrando do primeiro termo do lado esquerdo da equação II.26 verifica-se que

$$\frac{d(\vec{V} \cdot d\vec{l})}{dt} = \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} + \vec{V} \cdot d\left(\frac{d\vec{l}}{dt}\right). \quad (\text{II.27})$$

Por sua vez, o segundo termo do lado direito de II.27 é $\vec{V} \cdot d\vec{V} = \frac{1}{2}d(V^2)$. Portanto, tem-se finalmente

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = \frac{d(\vec{V} \cdot d\vec{l})}{dt} - \frac{1}{2}d(V^2), \quad (\text{II.28})$$

conseqüentemente

$$\oint_i \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} = \oint_i \frac{d(\vec{V} \cdot d\vec{l})}{dt} - \frac{1}{2} \oint_i d(V^2). \quad (\text{II.29})$$

Reescrevendo a equação II.26 com a utilização de II.29, ela toma a seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \oint_i \vec{V} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_i d(V^2) - \oint_i \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot d\vec{l} - \oint_i \nabla \phi \cdot d\vec{l} \quad (\text{II.30})$$

que apresentada em termos da diferencial exata fica

$$\frac{d}{dt} \oint_i \vec{V} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} \oint_i d(V^2) - \oint_i \frac{1}{\rho} dp - \oint_i d\phi. \quad (\text{II.31})$$

Sendo a circulação definida como $C = \oint_i \vec{V} \cdot d\vec{l}$ e sendo a integral de linha de uma diferencial exata num circuito fechado igual a zero, a equação II.31 reduz-se a

$$\frac{dC}{dt} = - \oint_i \frac{1}{\rho} dp. \quad (\text{II.32})$$

Portanto, a variação da circulação (absoluta) com o tempo se dá devido a ação do termo $-\oint_i \frac{1}{\rho} dp$, chamado de termo SOLENOIDAL. Essa equação expressa o teorema de Bjerknes da circulação.

Para melhor explicar a influência do termo solenoidal para a variação da circulação com o tempo, vamos considerar um recipiente contendo um determinado fluido aquecido por uma fonte de calor, conforme mostra a Figura II.1.

Pode-se observar que as superfícies de pressão constante apresentam curvaturas para a parte superior do recipiente enquanto que as superfícies de volume específico constante apresentam curvaturas no sentido oposto ou seja, para o lado da fonte de calor.

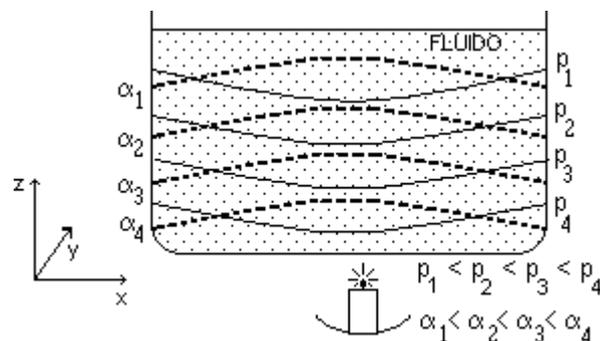


Figura II.1 - Corte no plano x,z mostrando linhas de interseção com superfícies de pressão

Para que o termo solenoidal tenha uma forma conveniente à análise da Figura II.1, ele será expresso de outra forma utilizando-se o teorema de Stokes. Logo

$$-\oint_l \frac{1}{\rho} dp = -\iint_A (\nabla \times \frac{1}{\rho} \nabla p) \cdot \vec{j} dA. \quad (\text{II.33})$$

Fazendo uso das propriedades vetoriais e do fato de que $\nabla \times \nabla p = 0$ pode-se escrever o termo solenoidal da seguinte forma

$$\iint_A (\nabla p \times \nabla \alpha) \cdot \vec{j} dA. \quad (\text{II.34})$$

Observando a Figura II.2 pode-se verificar que:

- 1) na parte A, existe uma contribuição dos solenóides com giro no sentido anti-horário e, portanto, uma contribuição do termo solenoidal para a taxa de variação da circulação na região A;
- 2) na parte B, o solenóide é nulo pois ∇p e $\nabla \alpha$ são paralelos e, portanto, $\nabla p \times \nabla \alpha = 0$;
- 3) na parte C, tem-se a presença de solenóides com giro no sentido horário e, portanto, uma contribuição do termo solenoidal para uma taxa de variação da circulação na região C.

Em resumo tem-se, movimento ascendente no centro do recipiente e movimento descendente nas bordas do mesmo. Esse efeito, apesar de esperado, esclarece a contribuição do termo solenoidal.

Um outro exemplo da importante contribuição do termo solenoidal pode ser verificado nos casos de brisa marítima e brisa terrestre.

Observe ainda que quando as superfícies de pressão constante são paralelas às superfícies de volume específico, densidade ou temperatura constantes o termo solenoidal é nulo e é dito que o fluido é barotrópico $p = p(\rho)$. Quando existem inclinações entre estas, diz-se que o fluido é baroclínico $p = p(\rho, T)$ ou seja, a pressão é função da densidade e da temperatura.

Para um fluido barotrópico a expressão II.32 reduz-se a

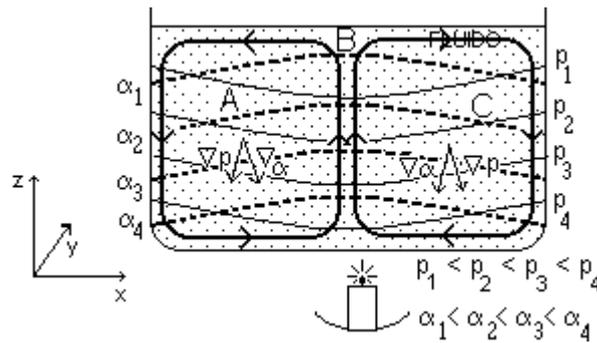


Figura II.2 - Esquema da contribuição do termo solenoidal para dC/dt , nas regiões A, B e C.

$$\frac{dC}{dt} = 0. \quad (\text{II.35})$$

Portanto, ao integrar essa equação tem-se que $C = \text{cte}$. A equação II.35 expressa o teorema de Kelvin da Circulação: "em um fluido barotrópico a circulação (absoluta) se conserva com o tempo".

II.3 EQUAÇÃO DA VORTICIDADE

Para se obter a equação da vorticidade para um escoamento no plano x, y em relação a um referencial absoluto, vamos tomar a equação de Euler para a direção x e derivar com relação a y, e tomar a equação de Euler para a direção y e derivar em relação a x. Portanto

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right); \quad (\text{II.36})$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right). \quad (\text{II.37})$$

Procedendo as derivadas, subtraindo II.36 de II.37 e arranjando devidamente os termos obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} = & -\zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.38})$$

ou

$$\frac{d\zeta}{dt} = \underbrace{-\zeta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{(A)} - \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right)}_{(B)} + \underbrace{\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)}_{(C)} \quad (\text{II.39})$$

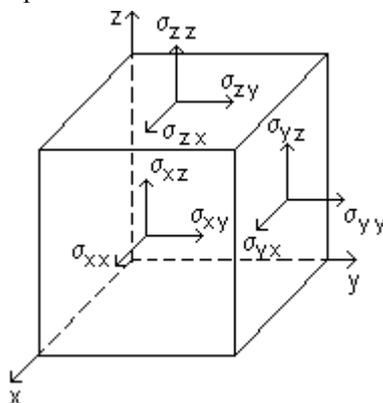
em que os termos representam: A - termo da divergência, B - termo de torção e C - termo solenoidal.

II.4 EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES

A equação de Navier-Stokes consiste basicamente da equação de Euler acrescida do termo devido ao efeito da viscosidade. Numa forma simples tem-se

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla p + \rho \vec{g} + \vec{F}_{viscosa} \quad (\text{II.40})$$

Para estudar a força viscosa, considera-se um volume de controle infinitesimal na forma apresentada na Figura II.3. Vejamos como se comportam as tensões em cada uma das faces do volume.



Por exemplo: σ_{xx} significa que a tensão de cisalhamento atua na face normal ao eixo x e na direção do eixo x, já σ_{xy} significa que a tensão de cisalhamento atua na face normal ao eixo x e na direção do eixo y, e assim por diante. Logo, o primeiro índice está ligado ao eixo normal a face e o segundo índice está ligado a direção da tensão em relação aos eixos coordenados.

Passando agora a fazer o balanço das forças viscosas para a direção y e por analogia obter para as direções dos eixos x e z. Portanto, na direção y agem as forças viscosas segundo mostra a Figura II.4.

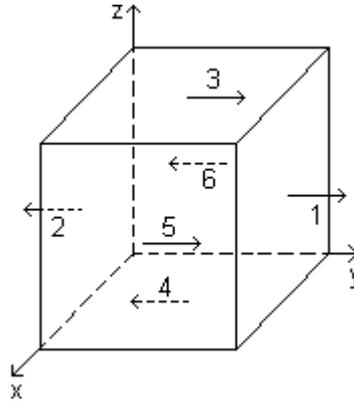


Figura II.4 - Balanço das forças viscosas na direção do eixo y.

As forças viscosas numeradas de 1 a 6 na Figura II.4 correspondem a

$$\begin{aligned}
 1) & \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z; & 2) & -\sigma_{yy} \delta x \delta z; & 3) & \left(\sigma_{zy} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \delta z \right) \delta x \delta y; \\
 4) & -\sigma_{zy} \delta x \delta y; & 5) & \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z & 6) & -\sigma_{xy} \delta y \delta z.
 \end{aligned}$$

Logo a força viscosa resultante na direção do eixo y é dada por

$$F_{viscosa(y)} = \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z. \quad (II.41)$$

Analogamente, tem-se para as direções x e z

$$F_{viscosa(x)} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z; \quad (II.42)$$

$$F_{viscosa(z)} = \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z. \quad (II.43)$$

Substituindo estas forças viscosas por unidade de volume nas componentes cartesianas da expressão II.40 tem-se

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}; \quad (II.44)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}; \quad (II.45)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \quad (\text{II.46})$$

Por outro lado, as tensões de cisalhamento que agem num fluido são dadas (genericamente) pela Lei de Stokes para a viscosidade, na forma

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \nabla \cdot \vec{V}; \quad (\text{II.47})$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \lambda \nabla \cdot \vec{V}; \quad (\text{II.48})$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \lambda \nabla \cdot \vec{V}; \quad (\text{II.49})$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (\text{II.50})$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad (\text{II.51})$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right); \quad (\text{II.52})$$

em que λ é chamado de segundo coeficiente de viscosidade. Substituindo-se os termos de II.47 a II.52 nas equações de II.44 a II.46 tem-se

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + (\mu - \lambda) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{V}); \quad (\text{II.53})$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + (\mu - \lambda) \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \cdot \vec{V}); \quad (\text{II.54})$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + (\mu - \lambda) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \cdot \vec{V}). \quad (\text{II.55})$$

Para o caso de um fluido incompressível ou seja, para $\nabla \cdot \vec{V} = 0$, as equações acima reduzem-se a

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u; \quad (\text{II.56})$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v; \quad (\text{II.57})$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + \mu \nabla^2 w; \quad (\text{II.58})$$

em que ∇^2 é o operador Laplaciano e não deve-se esquecer também do operador da variação substantiva d/dt .

II.5 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR

A transferência de calor por condução é dada pela primeira Lei de Fourier como

$$q' \propto \frac{\Delta T}{\Delta z}. \quad (\text{II.59})$$

A Figura II.5 mostra um esquema para a transferência de calor por condução.

Tomando o limite de II.59 quando Δz tende a zero e chamando a constante de proporcionalidade de k (condutividade térmica), tem-se

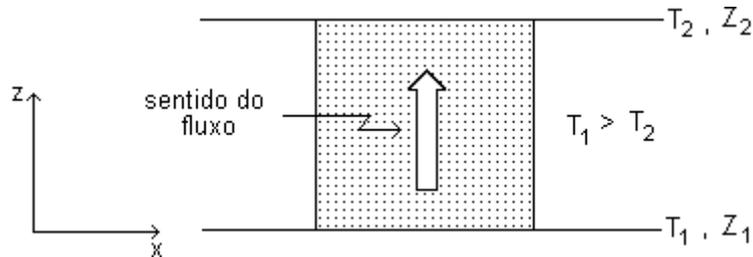


Figura II.5 - Transferência de calor por condução.

$$q' = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (\text{II.60})$$

o sinal negativo é devido ao sentido da transferência de calor que se dá dos altos valores de T para os mais baixos.

Considerando as três direções dos eixos cartesianos tem-se que

$$\vec{q}' = -k \nabla T. \quad (\text{II.61})$$

O fluxo de calor por condução pode também ser obtido da seguinte forma: considere o volume e a superfície de controle segundo a Figura II.6.

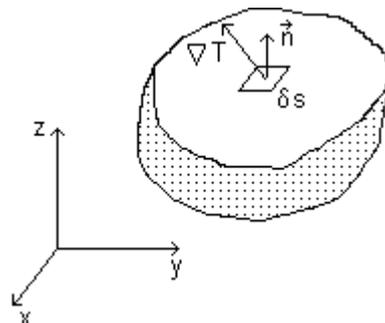


Figura II.6 - Volume de controle para obtenção do fluxo de calor por condução.

Logo, o fluxo de calor ou quantidade de calor é dado por

$$\iint_{sc} k \nabla T \cdot \vec{n} dA \quad (\text{II.62})$$

que, aplicando o teorema da divergência de Gauss, fica

$$\iiint_{vc} k \nabla^2 T dv. \quad (\text{II.63})$$

A quantidade de calor (Q) em um sistema é dada pela soma da energia interna (U) e do trabalho realizado (W), logo

$$Q = U + W. \quad (\text{II.64})$$

Pela primeira lei da termodinâmica tem-se

$$\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \quad (\text{II.65})$$

ou

$$\frac{dq}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt}. \quad (\text{II.66})$$

Essas expressões fornecem a taxa de variação de calor por unidade de massa. Portanto, o princípio de conservação de calor é dado por

$$\frac{dq}{dt} = \iiint_{vc} k \nabla^2 T dv, \quad (\text{II.67})$$

ou desprezando-se a parte do trabalho realizado (suposto processo isobárico), por

$$c_p \frac{dT}{dt} = \iiint_{vc} k \nabla^2 T dv \quad (\text{II.68})$$

conhecida como segunda Lei de Fourier para a transferência de calor num fluido.

Para o caso de um fluido em escoamento, aplicando-se o conceito da derivada substantiva expresso pela Equação I.19 fica

$$c_p \left(\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{vc} \rho T dv + \iint_{sc} \rho \vec{V} T \cdot \vec{n} dA \right) = \iiint_{vc} k \nabla^2 T dv \quad (\text{II.69})$$

ou

$$c_p \left(\iiint_{vc} \frac{\partial \rho T}{\partial t} dv + \iiint_{vc} \nabla \cdot \rho \vec{V} T dv \right) = \iiint_{vc} k \nabla^2 T dv \quad (\text{II.70})$$

ou ainda para o caso de um fluido incompressível

$$\iiint_{vc} \frac{\partial T}{\partial t} dv + \iiint_{vc} \vec{V} \cdot \nabla T dv = \iiint_{vc} K \nabla^2 T dv. \quad (\text{II.71})$$

II.71 é a equação de transferência de calor para um fluido incompressível, em que $K = k/\rho c_p$ é chamado de coeficiente de difusividade térmica.

Essa equação pode ser obtida na forma diferencial considerando que

$$\iiint_{vc} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T - K \nabla^2 T \right) dv = 0. \quad (\text{II.72})$$

Portanto, para que essa integral seja nula o integrando é que deve ser nulo. Logo

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T = K \nabla^2 T \quad (\text{II.73})$$

também pode ser escrita sob a forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (\text{II.74})$$

II.6 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE VAPOR

A transferência de vapor por condução segue o mesmo raciocínio que o apresentado para a transferência de calor. Portanto, chamaremos de q uma medida da quantidade de vapor (por exemplo: umidade específica - $q = 0,622e/(p - e)$, em que e é a pressão parcial do vapor). Logo

$$f_q \propto \frac{\Delta q}{\Delta z}. \quad (\text{II.75})$$

Quando da igualdade, e no limite quando Δz tende para zero, tem-se

$$f_q = -k_q \frac{\partial q}{\partial z} \quad (\text{II.76})$$

em que k_q é um coeficiente de condução de vapor. Numa forma genérica pode-se escrever

$$\vec{f}_q = -k_q \nabla q. \quad (\text{II.77})$$

A notação em termos de um volume de controle qualquer fica

$$f_q = \iint_{sc} k_q \nabla q \cdot \vec{n} dA = \iiint_{vc} k_q \nabla^2 q dv. \quad (\text{II.78})$$

O princípio de conservação de vapor é dado por

$$\frac{dq}{dt} = \iiint_{vc} k_q \nabla^2 q dv + \Phi \quad (\text{II.79})$$

em que Φ representa uma fonte ou sumidouro de vapor.

Desprezando-se fontes ou sumidouros de vapor e aplicando a derivada substantiva tem-se

$$\iiint_{vc} \frac{\partial \rho q}{\partial t} dv + \iint_{sc} \rho \vec{V}q \cdot \vec{n} dA = \iiint_{vc} k_q \nabla^2 q dv \quad (\text{II.80})$$

ou

$$\iiint_{vc} \frac{\partial \rho q}{\partial t} dv + \iiint_{vc} \nabla \cdot \rho \vec{V}q dv = \iiint_{vc} k_q \nabla^2 q dv \quad (\text{II.81})$$

que, para o caso de um fluido incompressível, toma a forma

$$\iiint_{vc} \frac{\partial q}{\partial t} dv + \iiint_{vc} \vec{V} \cdot \nabla q dv = \iiint_{vc} K_q \nabla^2 q dv. \quad (\text{II.82})$$

Neste caso $K_q = k_q / \rho$ é um coeficiente de difusividade.

Para se obter essa equação na forma diferencial, toma-se

$$\iiint_{vc} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla q - K_q \nabla^2 q \right) dv = 0 \quad (\text{II.83})$$

logo

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla q = K_q \nabla^2 q \quad (\text{II.84})$$

ou, ainda,

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = K_q \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right). \quad (\text{II.85})$$

II.7 EXERCÍCIOS

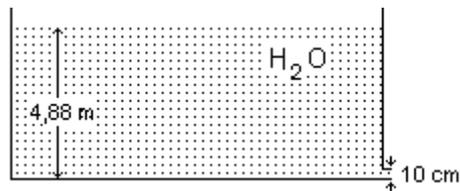
1 - Dada a equação de Euler na forma $\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$, obtenha as equações cartesianas e comente a aproximação hidrostática.

2 - Mostre que a expressão da aceleração vertical de um parcela de fluido com pressão p' , temperatura T' e densidade ρ' em um fluido estático com p, T e ρ é dada por

$$\frac{dw'}{dt} = g\left(\frac{\rho - \rho'}{\rho'}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{dw'}{dt} = g\left(\frac{T' - T}{T}\right).$$

3 - Escreva a equação de Euler em coordenadas naturais.

4 - Determine a velocidade de saída no bocal instalado na parede do reservatório da figura abaixo. Determine também a vazão no bocal.



5 - Desprezando-se a resistência do ar, determine a altura alcançada por um jato d'água vertical, cuja velocidade inicial é de 12,2 m/s.

6 - Mostre que para o caso dos gases, pode-se escrever

$$-\oint \frac{dp}{\rho} = R \iint (\nabla \ln p \times \nabla T) \cdot \vec{n} dA$$

em que \vec{n} é um vetor unitário normal a área A .

7 - Mostre que se o fluido é barotrópico $p = p(\rho)$, o termo solenoidal é zero.

8 - Calcule a taxa de variação da circulação para um quadrado no plano x, y com lados iguais a 1.000 Km cada se a temperatura aumenta na direção x a uma taxa de $2^\circ C/200 Km$ e a pressão aumenta na direção y a uma taxa de $2 hPa / 200 Km$. A pressão na origem é 1.000 hPa.

9 - Obtenha a aceleração tangencial média para os dados fornecidos no problema anterior.

10 - Esquematize a contribuição do termo solenoidal, para os casos de brisa marítima e brisa terrestre, com relação a taxa de variação da circulação.

11 - Obtenha a expressão para o perfil de velocidade em um escoamento laminar bidimensional (x, z) entre placas paralelas (fixa e móvel). Considere o escoamento permanente e que a variação da pressão na direção do escoamento é constante.

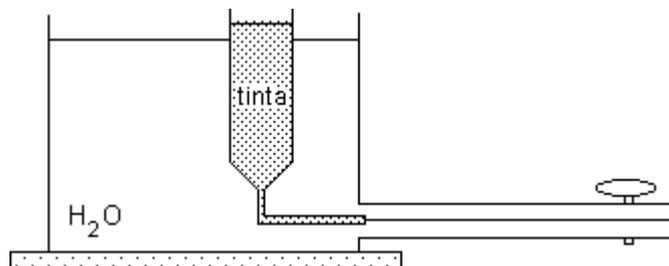
12 - Nas condições do problema anterior, obtenha o perfil de velocidade em um tubo cilíndrico ou seja obtenha $u=u(r)$ em que r é o raio do tubo.

CAPÍTULO III

Processos na Camada Limite Superficial

III.1 EXPERIÊNCIA DE REYNOLDS

Examinaremos a clássica experiência de Reynolds relativa ao escoamento viscoso. Água escoou através de um tubo de vidro, como mostra a Figura III.1, tendo a velocidade controlada por uma válvula.



válvula não provoca perturbação).

Na entrada do tubo, injeta-se tinta com o mesmo peso específico que a água. Quando a válvula de descarga encontra-se ligeiramente aberta a tinta escoou pelo tubo de vidro sem ser perturbada, formando um fio. Entretanto, à medida que se abre a válvula, atinge-se uma condição em que a tinta adquire um movimento oscilatório à proporção que se desloca pelo tubo. Um gráfico da velocidade versus tempo em dada posição do tubo do aparelho de Reynolds poderia aparecer como mostra a Figura III.2.

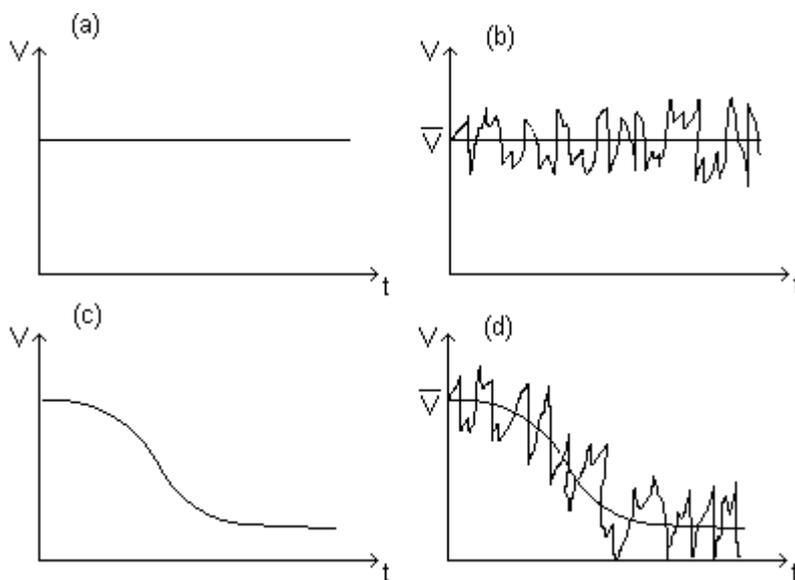


Figura III.2 Série temporal da velocidade para escoamento: (a) laminar permanente,

O escoamento turbulento variado (não permanente) pode ser considerado como aquele em que o campo de velocidade média muda com o tempo.

Reynolds verificou que o critério para transição de laminar para turbulento dependia do diâmetro do tubo, da velocidade e do tipo de fluido. Logo, criou um número adimensional chamado de Número de Reynolds que, na verdade, é a relação entre a força inercial e a força viscosa sob a forma

$$R_e = \frac{\rho u \partial u / \partial x}{\mu \partial^2 u / \partial x^2} \approx \frac{\rho U^2 L^{-1}}{\mu U L^{-2}} = \frac{UL}{\nu} \quad (\text{III.1})$$

Sob condições experimentais cuidadosamente controladas, usando um tubo bem liso e permitindo que o fluido permanecesse tranqüilo no tanque por longo tempo, verificou que o escoamento laminar pode ser mantido para número de Reynolds até cerca de 40.000. Todas as experiências até o momento indicaram que abaixo de 2.300 pode existir escoamento apenas laminar. Assim, acima de 2.300 pode ocorrer uma transição, dependendo da extensão das perturbações locais. Chamamos a este valor (2.300) número de Reynolds crítico. Entretanto, deve-se lembrar que o R_e crítico acima mencionado aplica-se apenas ao escoamento em tubos e que deve-se efetuar um estudo separado sobre condições de transição de escoamento laminar para turbulento na camada limite.

III.2 O CONCEITO DE CAMADA LIMITE

Considerando o escoamento sobre uma placa plana (Figura III.3), observe que uma região laminar se forma na borda de ataque e cresce em espessura, como mostra o diagrama. Atinge-se em seguida uma região de transição onde o escoamento muda de laminar para turbulento, com o conseqüente aumento de espessura da camada limite. Na região turbulenta veremos que, à medida que nos aproximamos do contorno, a turbulência diminui em tal extensão que predominam os efeitos laminares, conduzindo-nos ao conceito de uma subcamada laminar. Você não deve ficar com a impressão de que essas várias regiões mostradas em nosso diagrama são demarcações vivas dos diferentes escoamentos. Há na realidade uma mudança gradativa das regiões onde certos efeitos predominam para outras onde efeitos diferentes prevalecem. Ainda que a camada limite seja delgada, ela desempenha um papel importante na dinâmica de fluidos.

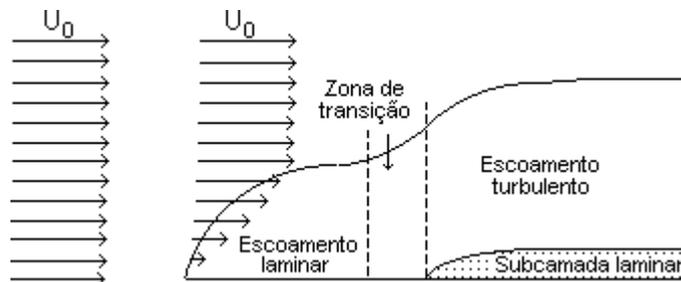


Figura III.3 - Diagrama mostrando as camadas limites laminar e turbulenta.

III.2.1 ESPESSURA DA CAMADA LIMITE

Falamos a cerca da espessura da camada limite de forma qualitativa, como a elevação acima do contorno que cobre uma região do escoamento onde existe um grande gradiente de velocidade e, conseqüentemente, efeitos viscosos não desprezíveis.

De forma bastante simples a espessura da camada limite é dada quando

$$\frac{u}{U} \cong 0,99 \quad (\text{III.2})$$

isso quer dizer que a espessura da camada limite é aquela em que a velocidade u se aproxima da velocidade do escoamento livre U .

Uma outra forma de se obter uma expressão para a espessura da camada limite é considerando que na interface entre a camada limite e o escoamento livre as forças de inércia e viscosa se equilibram. Logo

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \cong \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (\text{III.3})$$

Portanto, em termos das dimensões, tem-se

$$\rho \frac{U^2}{L} \cong \mu \frac{U}{\delta^2} \quad (\text{III.4})$$

que, resolvendo para obter o valor de δ fica

$$\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (\text{III.5})$$

ou genericamente como função de x , sob a forma

$$\delta(x) = \frac{x}{\sqrt{Re}}. \quad (\text{III.6})$$

III.2.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE A EQUAÇÃO DE NAVIER-STOKES DENTRO DA CAMADA LIMITE LAMINAR PARA UM ESCOAMENTO PERMANENTE.

Considerando que tal tipo de escoamento se dá no plano x, z , tem-se que a equação de Navier-Stokes (sem a presença de força externa) se restringi às expressões para essas duas dimensões. Logo

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{III.7})$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (\text{III.8})$$

Mas, antes de qualquer coisa, vamos analisar qual é a dimensão de w . Para isso utilizaremos a equação da continuidade de massa para um fluido incompressível que, para as condições estabelecidas, fica

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (\text{III.9})$$

Portanto, integrando de 0 até δ para obter a dimensão de w , tem-se

$$W \approx \int_0^\delta \frac{U}{L} \partial z \approx \frac{U\delta}{L}, \quad (\text{III.10})$$

ou, em termos do número de Reynolds, como

$$W \approx \frac{U}{\sqrt{Re}}. \quad (\text{III.11})$$

Agora pode-se retornar e analisar cada termo das equações III.7 e III.8. Veja:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U^2}{L}; \quad (\text{III.12})$$

$$w \frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{U}{\sqrt{R_e}} \frac{U}{\delta} = \frac{U^2}{L}; \quad (\text{III.13})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \cong u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{U^2}{L}; \quad (\text{III.14})$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx v \frac{U}{L^2} = \frac{1}{R_e} \frac{U^2}{L} \quad (\text{pequeno}); \quad (\text{III.15})$$

$$v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \approx v \frac{U}{\delta^2} = \frac{U^2}{L}; \quad (\text{III.16})$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} \approx \frac{U}{L} \frac{U}{\sqrt{R_e}} = \frac{1}{\sqrt{R_e}} \frac{U^2}{L} \quad (\text{pequeno}); \quad (\text{III.17})$$

$$w \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{W^2}{\delta} = \frac{1}{\sqrt{R_e}} \frac{U^2}{L} \quad (\text{pequeno}); \quad (\text{III.18})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \cong u \frac{\partial w}{\partial x} = w \frac{\partial w}{\partial z} \approx \frac{1}{\sqrt{R_e}} \frac{U^2}{L} \quad (\text{pequeno}); \quad (\text{III.19})$$

$$v \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx v \frac{W}{L^2} = \frac{1}{\sqrt{R_e^3}} \frac{U^2}{L} \quad (\text{pequeno}); \quad (\text{III.20})$$

$$v \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \approx v \frac{W}{\delta^2} = \frac{1}{\sqrt{R_e}} \frac{U^2}{L} \quad (\text{pequeno}). \quad (\text{III.21})$$

Após essas considerações, tem-se

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad (\text{III.22})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (\text{III.23})$$

A equação III.22 juntamente com a equação da continuidade de massa III.23, formam um conjunto de equações simplificadas para a camada limite laminar. São chamadas de equações de Prandtl para a camada limite laminar.

III.3 CAMADA LIMITE TÉRMICA

A camada limite térmica pode ser entendida por analogia à camada limite discutida anteriormente. Corresponde a uma faixa do fluido que vai da superfície de ataque a uma altura onde o transporte de calor por advecção se equipara ao transporte de calor por condução ou seja,

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \cong K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (\text{III.24})$$

Define-se o número de Piclet como sendo a razão entre $u \partial T / \partial x$ e $K \partial^2 T / \partial z^2$. Logo

$$P_e = \frac{u \partial T / \partial x}{K \partial^2 T / \partial z^2} \approx \frac{U \Theta / L}{K \Theta / L^2} = \frac{U L}{K}. \quad (\text{III.25})$$

Define-se também o número de Prandtl como sendo a razão entre a viscosidade cinemática (ν) e o coeficiente de difusividade térmica (K). Logo

$$P_r = \frac{\nu}{K} \quad (\text{III.26})$$

e, conseqüentemente, tem-se

$$P_e = R_e P_r. \quad (\text{III.27})$$

Podemos agora obter uma expressão para a espessura da camada limite térmica em função desses números adimensionais já definidos. Sendo

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \cong K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (\text{III.28})$$

em termos das dimensões, tem-se

$$\frac{U \Theta}{L} \cong \frac{K \Theta}{\delta_T^2}, \quad (\text{III.29})$$

portanto,

$$\delta_T = \frac{L}{\sqrt{P_e}} = \frac{L}{\sqrt{R_e P_r}}. \quad (\text{III.30})$$

Vejamos agora as simplificações da equação de transferência de calor para a camada limite térmica. Para o plano x, z a equação de transferência de calor tem a forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (\text{III.31})$$

Logo, as dimensões de cada um dos termos são:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{U \Theta}{L}; \quad (\text{III.32})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{U \Theta}{L}; \quad (\text{III.33})$$

$$w \frac{\partial T}{\partial z} \approx \frac{W \Theta}{\delta_T} = \sqrt{P_r} \frac{U \Theta}{L} \cong \frac{U \Theta}{L}; \quad (\text{III.34})$$

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{K \Theta}{L^2} = \frac{1}{\sqrt{R_e P_r}} \frac{U \Theta}{L} \quad (\text{pequeno}); \quad (\text{III.35})$$

$$K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \approx \frac{K \Theta}{\delta_T^2} \cong \frac{U \Theta}{L}. \quad (\text{III.36})$$

Após essas análises, a equação simplificada para transferência de calor na camada limite térmica é simplesmente

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (\text{III.37})$$

III.4 ESCOAMENTO TURBULENTO

Observou-se que uma solução teórica completa para o escoamento turbulento, análoga àquela do escoamento laminar, é impossível devido a complexidade e natureza aparentemente aleatória das flutuações de velocidade no escoamento turbulento. Todavia, a análise semi teórica, ajudada pelos dados experimentais, será apresentada. Isso permitirá formular um perfil de velocidade para escoamento com elevado número de Reynolds.

III.4.1 A TURBULÊNCIA MEDIDA EM RELAÇÃO AO TEMPO

Num escoamento turbulento, a média em relação ao tempo representa a parte bem ordenada do escoamento. Tais quantidades são as medidas por um observador munido de instrumentos padrão. A parte flutuante do escoamento é indicada pelos desvios em relação a média (Figura III.4).

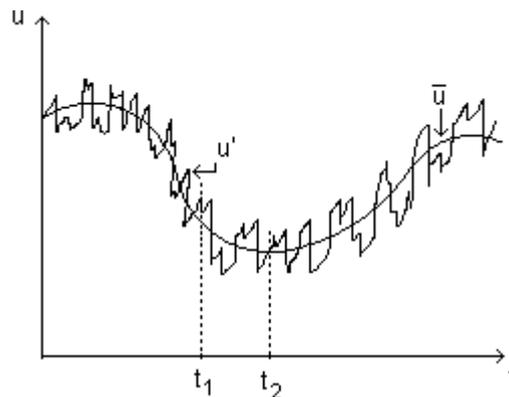


Figura III.4 - Série temporal da componente u da velocidade para escoamento turbulento: parte média e desvios.

Para um determinado intervalo de tempo Δt (pequeno), a média é obtida por

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} u dt. \quad (\text{III.38})$$

Dado $u = \bar{u} + u'$, sendo $\bar{u} \equiv$ parte média e $u' \equiv$ parte turbulenta. Assim, o campo de temperatura, pressão velocidade, etc. pode ser representado por:

$$\begin{cases} T = \bar{T} + T' \\ p = \bar{p} + p' \\ u = \bar{u} + u' \\ v = \bar{v} + v' \\ w = \bar{w} + w' \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Veja algumas propriedades da média. Sejam f e g escalares, então $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$; $\overline{af} = a\bar{f}$ ($a = \text{cte.}$); $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g}$; $\overline{f'g'} = \bar{f}'\bar{g}'$. Veja o exemplo para o caso de se ter a média de u vezes v (\overline{uv})

$$\overline{uv} = \overline{(\bar{u} + u')(\bar{v} + v')} = \overline{\bar{u}\bar{v} + \bar{u}v' + \bar{v}u' + u'v'} = \bar{u}\bar{v} + \overline{\bar{u}v'} + \overline{\bar{v}u'} + \overline{u'v'}$$

finalmente tem-se que

$$\overline{uv} = \bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}.$$

Observe que a média dos desvios é igual a zero enquanto que a média do produto dos desvios não é nula.

III.4.2 EQUAÇÃO DE REYNOLDS

Tomemos a equação de Navier-Stokes para a direção do eixo x (escoamento laminar). Posteriormente, por analogia, obteremos as equações para as direções y e z . Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (\text{III.40})$$

e sendo a equação da continuidade de massa para um fluido incompressível igual a

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (\text{III.41})$$

tem-se também que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) u = 0. \quad (\text{III.42})$$

Somar III.42 ao lado esquerdo de III.40 não provoca alterações na igualdade uma vez que esta quantidade é nula. Arranjando os termos devidamente tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uu}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (\text{III.43})$$

Agora, aplicando os conceitos de turbulência na equação III.43 iremos obter

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho \bar{u}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{u}'w'}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \rho \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right). \quad (\text{III.44})$$

Rearranjando os termos de III.44 tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho \bar{u}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{u}'w'}{\partial z} \right). \quad (\text{III.45})$$

Analogamente, para as direções y e z

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho \bar{v}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{v}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{v}'w'}{\partial z} \right); \quad (\text{III.46})$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) - g - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho \bar{w}'u'}{\partial x} + \frac{\partial \rho \bar{w}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \rho \bar{w}'w'}{\partial z} \right). \quad (\text{III.47})$$

Observe que o estado médio satisfaz a equação de Navier-Stokes e, portanto, o termo restante é o responsável pela turbulência e é chamado de tensor de cisalhamento de Reynolds (Γ). Desta forma,

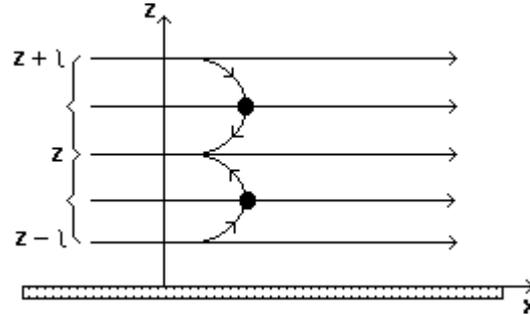
$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\rho \bar{u}'u' & -\rho \bar{u}'v' & -\rho \bar{u}'w' \\ -\rho \bar{v}'u' & -\rho \bar{v}'v' & -\rho \bar{v}'w' \\ -\rho \bar{w}'u' & -\rho \bar{w}'v' & -\rho \bar{w}'w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.48})$$

em que $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$; $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$; $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$.

Para avaliar os termos de tensão de cisalhamento de Reynolds num escoamento turbulento, Prandtl enunciou a teoria do comprimento de mistura discutida a seguir.

III.4.2.1 TEORIA DE COMPRIMENTO DE MISTURA DE PRANDTL

Prandtl estabeleceu um modelo bastante simplificado de transferência de quantidade de movimento para escoamento turbulento. Ele fez a hipótese de que em qualquer ponto z , tal como mostrado na Figura III.5, aparecem, em intervalos aleatórios, parcelas de fluido numa posição distante de l , o comprimento de mistura, acima e abaixo do ponto. Esse efeito provoca troca de quantidade de movimento que resulta na aparição de uma componente de velocidade de flutuação. A amplitude dessa flutuação de velocidade depende da distribuição de velocidade média próximo a z e também do comprimento de mistura.



Os conceitos precedentes podem ser expressos matematicamente com a ajuda da Figura III.6. A diferença entre as velocidades médias das parcelas de fluido provenientes de $z \pm l$ e o fluido em z é dada por

$$\Delta \bar{u}_1 = \bar{u}(z+l) - \bar{u}(z); \quad (\text{III.49})$$

$$\Delta \bar{u}_2 = \bar{u}(z) - \bar{u}(z-l). \quad (\text{III.50})$$

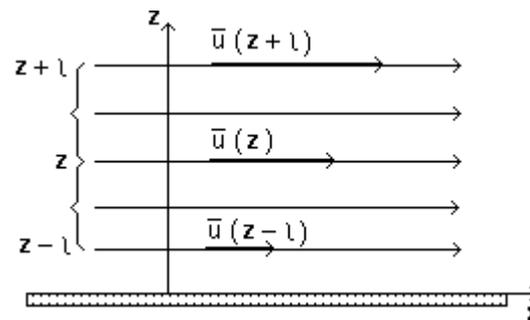


Figura III.6 - Velocidade média na camada limite turbulenta.

Podemos exprimir $\bar{u}(z+l)$ e $\bar{u}(z-l)$ por meio de uma série de Taylor (aproximação linear) em torno do ponto z . Portanto, as expressões III.49 e III.50 ficam

$$\Delta \bar{u}_1 = \bar{u}(z) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} l - \bar{u}(z); \quad (\text{III.51})$$

$$\Delta \bar{u}_2 = \bar{u}(z) - \bar{u}(z) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} l. \quad (\text{III.52})$$

Eliminando-se os termos equivalentes e de sinal contrário tem-se

$$\Delta \bar{u}_1 = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}; \quad (\text{III.53})$$

$$\Delta \bar{u}_2 = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (\text{III.54})$$

Portanto, a flutuação da velocidade na direção do escoamento na posição z pode ser considerada como a média das diferenças $\Delta \bar{u}_1$ e $\Delta \bar{u}_2$. Logo,

$$u' = \frac{1}{2} (\Delta \bar{u}_1 + \Delta \bar{u}_2). \quad (\text{III.55})$$

Conseqüentemente,

$$u' = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (\text{III.56})$$

Vale salientar que as flutuações de velocidade na direção transversal são de magnitude comparável isto é, $u' \approx v' \approx w'$.

III.4.2.2 PERFIL DE VELOCIDADE NUM ESCOAMENTO TURBULENTO

Próximo de um contorno deve haver um decréscimo no intercâmbio de quantidade de movimento porque a turbulência é suprida quando se chega próximo de um contorno. Isso significa que o comprimento de mistura diminui ao se aproximar de um contorno. Prandtl fez a suposição de que $l = cz$, em que c é uma constante de proporcionalidade.

Considerando a aplicação no plano x, z e sendo $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$, a tensão de cisalhamento de interesse é obtida da equação de Reynolds. Logo,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \overline{u'w'}}{\partial z}. \quad (\text{III.57})$$

Integrando tem-se

$$\sigma = \rho \overline{u'w'}. \quad (\text{III.58})$$

Substituindo u' e w' pelos valores obtidos segundo a teoria de comprimento de mistura essa expressão assume a forma

$$\sigma = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2. \quad (\text{III.59})$$

Tomando a raiz quadrada de ambos os termos de III.59 tem-se

$$\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (\text{III.60})$$

O termo $\sqrt{\sigma/\rho}$ tem dimensão de velocidade e é chamado de velocidade de tensão de cisalhamento ou velocidade de fricção e é representado por u^* . Portanto,

$$u^* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad \text{ou} \quad u^* = l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (\text{III.61})$$

Sendo $l = cz$, em que c é uma constante, tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u^*}{cz} \quad (\text{III.62})$$

onde se assumiu que $l = cz$. Integrando a III.62 tem-se

$$\bar{u} = \frac{u^*}{c} \ln z + \text{cte}. \quad (\text{III.63})$$

Usando-se a condição de contorno de que em z_0 tem-se $\bar{u}(z_0) = 0$. Portanto, pode-se reescrever a III.63 sob a forma

$$\bar{u} = \frac{u^*}{c} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right). \quad (\text{III.64})$$

Essa expressão é conhecida como perfil de velocidade do escoamento na camada limite turbulenta.

Para se determinar o valor de u^* aplica-se a equação III.64 para dois níveis com velocidades conhecidas tais que

$$\bar{u}_2 = \frac{u^*}{c} \ln\left(\frac{z_2}{z_0}\right); \quad (\text{III.65})$$

$$\bar{u}_1 = \frac{u^*}{c} \ln\left(\frac{z_1}{z_0}\right). \quad (\text{III.66})$$

Fazendo $\bar{u}_2 - \bar{u}_1$ e organizando devidamente os termos tem-se

$$u^* = \frac{c(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)}{\ln(z_2/z_1)}. \quad (\text{III.67})$$

Voltando à expressão em que $\sigma = \rho \overline{u'w'}$, podemos escrever que

$$\sigma = \rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (\text{III.68})$$

Considerando que $K_m = \rho l^2 (\partial \bar{u} / \partial z)$ é um coeficiente de difusividade turbulenta, pode-se reescrever a III.68 como

$$\sigma = K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (\text{III.69})$$

que se assemelha à lei de Newton da viscosidade. Enquanto μ é uma característica do fluido, K_m é uma característica do escoamento turbulento.

III.4.3 ANALOGIA DE REYNOLDS PARA A TEMPERATURA

III.4.3.1 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE CALOR PARA ESCOAMENTO TURBULENTO

Considere a equação original da forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{III.70})$$

que para o caso de um fluido incompressível, pode também ser expressa como

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial uT}{\partial x} + \frac{\partial vT}{\partial y} + \frac{\partial wT}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (\text{III.71})$$

Aplicando conceitos de turbulência, em que $T = \bar{T} + T'$, $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$ e $w = \bar{w} + w'$. Após manipulações matemáticas tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) - \\ \frac{1}{\rho c_p} \left(\frac{\partial \rho c_p \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho c_p \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_p \overline{w'T'}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Pode-se observar que o estado médio satisfaz a equação original. Portanto, para o escoamento turbulento o termo de maior importância é

$$-\frac{1}{\rho c_p} \left(\frac{\partial \rho c_p \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \rho c_p \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \rho c_p \overline{w'T'}}{\partial z} \right) \quad (\text{III.73})$$

que é uma analogia ao cisalhamento turbulento de Reynolds.

III.4.3.2 FLUXO DE CALOR NA CAMADA LIMITE TÉRMICA TURBULENTO

Considere o plano x, z. Logo,

$$0 = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial \rho c_p \overline{w'T'}}{\partial z}. \quad (\text{III.74})$$

Integrando tem-se

$$H = -\rho c_p \overline{w'T'}, \quad (\text{III.75})$$

em que H é o fluxo de calor.

Por analogia com a teoria de comprimento de mistura de Prandtl, T' é dado por $T' = l_T (\partial \bar{T} / \partial z)$ em que $l_T = c_T z$. Verifica-se que $c_T \approx c$. Portanto,

$$H = -\rho c_p l \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} l_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \quad (\text{III.76})$$

ou

$$H = -\rho c_p u^* l \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \quad (\text{III.77})$$

em que $l_T = c_T z = cz = l$. Integrando de $\bar{T}(z_1) = \bar{T}_1$ a $\bar{T}(z_2) = \bar{T}_2$, tem-se

$$H = -\rho c_p u^* c \frac{(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{\ln(z_2/z_1)} \quad (\text{III.78})$$

ou, substituindo a expressão para u^*

$$H = -\rho c_p c^2 \frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)(\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{[\ln(z_2/z_1)]^2}. \quad (\text{III.79})$$

III.4.4 ANALOGIA DE REYNOLDS PARA O VAPOR

III.4.4.1 EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE VAPOR NA CAMADA LIMITE TURBULENTA

Aplicando conceitos de turbulência à equação original da forma

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = K_q \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) \quad (\text{III.80})$$

e seguindo os mesmos procedimentos usados anteriormente tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = K_q \left(\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial z^2} \right) - \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{\rho u' q'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v' q'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho w' q'}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

Observe também que o estado médio satisfaz a equação original e que o termo de maior importância para o escoamento turbulento é

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \overline{\rho u' q'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho v' q'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho w' q'}}{\partial z} \right). \quad (\text{III.82})$$

III.4.4.2 FLUXO DE VAPOR NA CAMADA LIMITE TURBULENTA

Considere o plano x, z . Logo,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \overline{w'q'}}{\partial z}. \quad (\text{III.83})$$

Integrando tem-se

$$E = -\rho \overline{w'q'}, \quad (\text{III.84})$$

em que E é o fluxo de vapor. Da mesma forma, por analogia com o conceito de comprimento de mistura de Prandtl, $q' = l_q (\partial \bar{q} / \partial z)$ com $l_q \approx l$. Logo,

$$E = -\rho l^2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (\text{III.85})$$

ou

$$E = -\rho u^* l \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \quad (\text{III.86})$$

uma vez que $u^* = l (\partial \bar{u} / \partial z)$.

Integrando III.86 de $\bar{q}(z_1) = \bar{q}_1$ a $\bar{q}(z_2) = \bar{q}_2$, se obtém

$$E = -\rho u^* c \frac{(\bar{q}_2 - \bar{q}_1)}{\ln(z_2/z_1)} \quad (\text{III.87})$$

que substituindo u^* fica

$$E = -\rho c^2 \frac{(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)(\bar{q}_2 - \bar{q}_1)}{[\ln(z_2/z_1)]^2}. \quad (\text{III.88})$$

III.5 EXERCÍCIOS

1 Dê o conceito de Camada Limite Laminar e Camada Limite Turbulenta.

2 Obtenha as equações simplificadas de Prandtl para a camada limite laminar.

3 Dê o conceito de comprimento de mistura de Prandtl.

4 Determine para os dados de velocidade do vento, medidos em vários níveis segundo a tabela abaixo, a expressão do perfil de velocidade correspondente $[\bar{u} = \bar{u}(z)]$.

Velocidade do vento (m/s) e altura (m)

0,20 m	0,40 m	0,60 m	0,80 m	1,00 m	1,50 m	1,75 m	2,00 m	2,25 m	2,50 m	2,75 m
0,32	0,21	0,49	1,09	2,03	2,60	3,12	3,38	3,63	3,87	4,09
0,35	0,19	0,43	0,83	1,48	2,29	2,72	2,97	3,19	3,41	3,59
0,25	0,20	0,40	0,82	1,75	2,18	2,67	2,90	3,05	3,32	3,42
0,26	0,19	0,36	0,64	1,57	1,85	2,20	2,39	2,54	2,74	2,88
0,26	0,15	0,38	0,72	1,52	2,54	3,06	2,32	3,31	3,79	3,93
0,20	0,20	0,39	0,78	1,46	2,16	2,55	2,81	2,93	3,16	3,32
0,31	0,23	0,35	0,69	1,46	2,25	2,73	2,96	3,13	3,38	3,54

Utilize $c = 0,4$.

5 Determine para os dados de temperatura, medidos em vários níveis segundo tabela abaixo e usando também os dados fornecidos no problema anterior, o fluxo de calor para as várias camadas.

Temperatura (°C) e altura (m)

0,20 m	0,40 m	0,60 m	0,80 m	1,00 m	1,50 m	1,75 m	2,00 m	2,25 m	2,50 m	2,75 m
18,64	18,44	18,49	18,59	18,64	18,76	18,57	18,47	18,41	18,39	18,37
18,98	19,33	19,50	19,71	19,77	19,92	19,55	19,45	19,36	19,29	19,20
19,38	20,02	20,26	20,51	20,40	20,41	20,32	20,18	20,08	19,99	19,89
19,67	20,14	20,39	20,65	20,48	20,42	20,38	20,25	20,18	20,10	20,03
19,97	20,60	20,80	21,18	20,95	20,91	20,92	20,79	20,71	20,63	20,55
20,35	21,74	22,09	22,59	22,33	22,28	21,95	21,76	21,64	21,49	21,34
21,20	21,88	22,15	22,49	22,33	22,21	22,03	21,88	21,74	21,65	21,53

Use também $c = 0,4$.

CAPÍTULO IV

Análise Dimensional

IV.1 ANÁLISE DIMENSIONAL

Muitos dos parâmetros adimensionais podem ser entendidos como a relação entre duas forças cujo valor indica a importância relativa de uma delas face à outra. Se algumas forças, num determinado escoamento, são muito maiores que outras, freqüentemente é possível desprezar o efeito das forças menores e tratar o fenômeno como se ele fosse completamente determinado pelas forças mais intensas.

Geralmente a solução de problemas práticos de dinâmica de fluidos requer tanto um desenvolvimento teórico como resultados experimentais. Através de um agrupamento de grandezas significativas em parâmetros adimensionais é possível reduzir o número de variáveis presentes e tornar este resultado compacto (equações ou gráficos) aplicável a todas as situações semelhantes.

As dimensões básicas da dinâmica são força, massa, comprimento e tempo, relacionadas pela segunda lei de Newton

$$F = m \cdot a \quad (IV.1)$$

em que $m \equiv M$, $a \equiv LT^{-2}$. Logo $F \equiv MLT^{-2}$.

Vejamos agora a Tabela IV.1 mostrando as dimensões de algumas grandezas freqüentemente utilizadas.

Tabela IV.1 - Dimensões das grandezas físicas usadas mais freqüentemente

GRANDEZA	SÍMBOLO	DIMENSÕES (M,L,T)
comprimento	l	L
tempo	t	T
massa	m	M
temperatura	T	Θ
força	F	MLT^{-2}
velocidade	V	LT^{-1}
aceleração	a	LT^{-2}
área	A	L^2
volume	v	L^3
vazão	Q	L^3T^{-1}
pressão ou queda de pressão	Δp	$ML^{-1}T^{-2}$
aceleração da gravidade	g	LT^{-2}
densidade	ρ	ML^{-3}
viscosidade dinâmica	μ	$ML^{-1}T^{-1}$
viscosidade cinemática	ν	L^2T^{-1}
tensão de cisalhamento	σ	$ML^{-1}T^{-2}$

A segunda lei de Newton na forma dimensional é $F = MLT^{-2}$, mostrando que três dimensões são independentes. Um sistema de unidades comumente empregado na análise dimensional é o sistema M, L, T .

Para entendermos os objetivos da análise dimensional, vejamos a seguinte questão: admite-se que a vazão através de um tubo capilar horizontal depende da queda de pressão por unidade de comprimento, do diâmetro do tubo e da viscosidade. Portanto, determinaremos a forma da equação que rege o fenômeno.

As grandezas e suas dimensões são as seguintes:

vazão	Q	$L^3 T^{-1}$;
queda de pressão por comprimento	$\frac{\Delta p}{l}$	$ML^{-2} T^{-2}$;
diâmetro	D	L ;
viscosidade	μ	$ML^{-1} T^{-1}$.

Logo, em termos de função tem-se

$$Q = Q\left(\frac{\Delta p}{l}, D, \mu\right). \quad (IV.2)$$

Portanto, pode-se escrever que

$$Q \propto \left(\frac{\Delta p}{l}\right)^\alpha D^\beta \mu^\gamma. \quad (IV.3)$$

Substituindo-se as dimensões e tomando a igualdade, tem-se

$$L^3 T^{-1} = cte. (ML^{-2} T^{-2})^\alpha (L)^\beta (ML^{-1} T^{-1})^\gamma \quad (IV.4)$$

e, portanto, conclui-se que

$$\begin{cases} L & \Rightarrow & 3 = -2\alpha + \beta - \gamma \\ M & \Rightarrow & 0 = \alpha + \gamma \\ T & \Rightarrow & 1 = 2\alpha + \gamma. \end{cases} \quad (IV.5)$$

Resolvendo esse sistema de equações obtém-se que $\alpha = 1$; $\beta = 4$ e $\gamma = -1$. Logo,

$$Q = cte. \frac{\Delta p D^4}{l \mu} \quad (IV.6)$$

do que se conclui que a análise dimensional não fornece nenhuma informação sobre o valor numérico da constante adimensional. Experiências mostram que o valor da constante para esta expressão é $\pi/128$.

Quando se trabalha com várias grandezas tem-se bastante problemas. Para facilitar essas questões vamos estudar uma metodologia mais criteriosa, o teorema π ou teorema de Buckingham.

IV.1.1 TEOREMA DE BUCKINGHAN

O teorema π ou teorema de Buckingham mostra que num problema físico envolvendo n grandezas nas quais estão envolvidas m dimensões, as grandezas podem ser agrupadas em $n - m$ parâmetros adimensionais independentes.

Sejam $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ as grandezas envolvidas, tais como pressão, viscosidade, velocidade, etc. Sabe-se que todas as grandezas são essenciais à solução devendo pois existir alguma relação funcional

$$F(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n) = 0. \quad (IV.7)$$

Se π_1, π_2, π_3 , etc. representam grupos adimensionais das grandezas A_1, A_2, A_3 , etc. com m dimensões envolvidas, então existe uma equação do tipo

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots, \pi_{n-m}) = 0. \quad (\text{IV.8})$$

O método para determinação dos parâmetros π consiste em se escolher m das n grandezas A , com dimensões diferentes, que contenham entre elas as m dimensões, e usá-las como base juntamente com uma das outras grandezas A para cada π . Por exemplo, consideremos que A_1, A_2 e A_3 contem M, L e T , não necessariamente em cada uma individualmente, mas em conjunto. Então, o primeiro parâmetro π é formado por

$$\pi_1 = A_1^{x_1} A_2^{y_1} A_3^{z_1} A_4, \quad (\text{IV.9})$$

o segundo por

$$\pi_2 = A_1^{x_2} A_2^{y_2} A_3^{z_2} A_5, \quad (\text{IV.10})$$

e assim por diante

$$\pi_{n-m} = A_1^{x_{n-m}} A_2^{y_{n-m}} A_3^{z_{n-m}} A_n. \quad (\text{IV.11})$$

Nestas equações os expoentes devem ser determinados de tal forma que cada π resulte em um número adimensional. As dimensões das grandezas A são substituídas e os expoentes M, L, T são todos iguados a zero. Isto conduz a três equações, a três incógnitas para cada parâmetro π .

Se apenas duas dimensões estão envolvidas seleciona-se duas grandezas A para formar a base e obtém-se duas equações a duas incógnitas para cada π .

O processo de cálculo será ilustrado pelo exemplo a seguir. Sabendo-se que existe uma relação entre $E \equiv$ empuxo, $\rho \equiv$ densidade, $g \equiv$ aceleração da gravidade e $v \equiv$ volume do líquido deslocado obter a relação para o empuxo. Logo,

$$F(E, g, \rho, v) = 0. \quad (\text{IV.12})$$

Existem 4 parâmetros ($n = 4$) e estão relacionadas 3 dimensões ($m = 3$). Logo existe 1 parâmetro π . Então,

$$f(\pi_1) = 0 \quad (\text{IV.13})$$

e

$$\pi_1 = E^{x_1} g^{y_1} \rho^{z_1} v. \quad (\text{IV.14})$$

Substituindo as dimensões tem-se

$$(M^0 L^0 T^0) = (MLT^{-2})^{x_1} (LT^{-2})^{y_1} (ML^{-3})^{z_1} (L^3). \quad (\text{IV.15})$$

Resolvendo para cada dimensão fica

$$\begin{cases} M \Rightarrow 0 = x_1 + z_1 \\ L \Rightarrow 0 = x_1 + y_1 - 3z_1 + 3 \\ T \Rightarrow 0 = -2x_1 - 2y_1 \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

que forma um sistema de três equações a três incógnitas. Resolvendo o sistema tem-se: $x_1 = -1$, $y_1 = 1$ e $z_1 = 1$. Portanto,

$$\pi_1 = E^{-1} g^1 \rho^1 v \quad (\text{IV.17})$$

ou

$$\pi_1 = \frac{g\rho v}{E}. \quad (\text{IV.18})$$

Obtendo o valor do empuxo (E) em função das outras grandezas tem-se

$$E = cte. g\rho v \quad (\text{IV.19})$$

onde para esse caso a experiência mostra que $cte.= 1$.

IV.2 EXERCÍCIOS

1 Formar parâmetros adimensionais com os seguintes grupos de grandezas.

$$\text{a) } \Delta p, \rho, V \quad \text{b) } \rho, g, V, F \quad \text{c) } \mu, F, \Delta p, t.$$

2 Obter expressão para u^* sabendo-se que existe a relação funcional

$$F(u^*, F_T, \rho, A) = 0,$$

em que F_T é a força de cisalhamento.

3 Sabendo-se que a tensão de cisalhamento (σ) num escoamento unidimensional laminar depende da viscosidade e da velocidade de deformação (du/dy), determinar a forma da lei de Newton da viscosidade com base na análise dimensional.

4 Num fluido girando como um sólido em torno de um eixo vertical com velocidade angular ω , o aumento de pressão Δp numa direção radial depende de ω , do raio r e da densidade ρ . Obter a forma da equação para Δp .

BIBLIOGRAFIA
E
APÊNDICES

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Bergeron, T. ; Bjerknes, R. and Bundgaard, R. C. *Dinamic meteorology and weather forecasting*. American Meteorology Society. 1957. 800p.

Coimbra, Alberto Luiz. *Mecânica dos meios contínuos*. Ao Livro Técnico S. A. 1967. 264p.

Eskinazi, Salamon. *Fluid mechanics and thermodynamics of our environment*. Academic Press. 1975. 421p.

Fox, Robert W. e McDonald, Alan T. *Introdução à mecânica dos fluidos*. Guanabara Dois S.A. 1981. 562p.

Holton, James R. *An introduction to dynamic meteorology*. Academic Press. 1972. 319p.

Shames, Irving Herman. *Mecânica dos fluidos*. Edgard Blücher. Volume 1. 1973. 192p.

Shames, Irving Herman. *Mecânica dos fluidos*. Edgard Blücher. Volume 2. 1973. 533p.

Streeter, Victor Lyle. *Mecânica dos Fluidos*. McGraw-Hill do Brasil. 1977. 736p.

Sutton, O. G. *Micrometeorology*. McGraw-Hill Company. 1953. 333p.

Vieira, Rui Carlos de Camargo. *Atlas de mecânica dos fluidos, fluidodinâmica*. Edgard Blücher. 1971. 281p.

A.1 COORDENADAS CURVILÍNEAS

Seja um ponto qualquer \vec{P} em que $\vec{P} = \vec{P}(x, y, z)$ e x, y, z podem ser escritas em termos de outros eixos, como r, θ, α . Portanto

$$\begin{cases} x = x(r, \theta, \alpha) \\ y = y(r, \theta, \alpha) \\ z = z(r, \theta, \alpha). \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Logo

$$d\vec{P} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}, \quad (\text{A.2})$$

tem-se

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \alpha} d\alpha; \quad (\text{A.3})$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \alpha} d\alpha; \quad (\text{A.4})$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (\text{A.5})$$

e portanto em termos de $d\vec{P}$, tem-se

$$\begin{aligned} d\vec{P} = & \left(\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \right) dr + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k} \right) d\theta + \\ & \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \alpha} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \alpha} \vec{k} \right) d\alpha \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ou então

$$d\vec{P} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha} d\alpha. \quad (\text{A.7})$$

Sendo $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ e \vec{e}_α vetores unitários nas direções r, θ e α dados por

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} \right| \rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} = h_r \vec{e}_r; \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} \right| \rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} = h_\theta \vec{e}_\theta; \quad (\text{A.9})$$

$$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha} \Big/ \left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha} \right| \rightarrow \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha} = h_\alpha \vec{e}_\alpha. \quad (\text{A.10})$$

Em que h_r, h_θ, h_α são chamados de métricas e são dadas respectivamente por $\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} \right|$, $\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} \right|$ e $\left| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha} \right|$. Portanto

$$d\vec{P} = h_r dr \vec{e}_r + h_\theta d\theta \vec{e}_\theta + h_\alpha d\alpha \vec{e}_\alpha. \quad (\text{A.11})$$

Os elementos de superfície normais a r, θ e α são dados por (ver Figura A.1)

$$dS_r = h_\theta h_\alpha d\theta d\alpha; \quad (\text{A.12})$$

$$dS_\theta = h_r h_\alpha dr d\alpha; \quad (\text{A.13})$$

$$dS_\alpha = h_r h_\theta dr d\theta. \quad (\text{A.14})$$

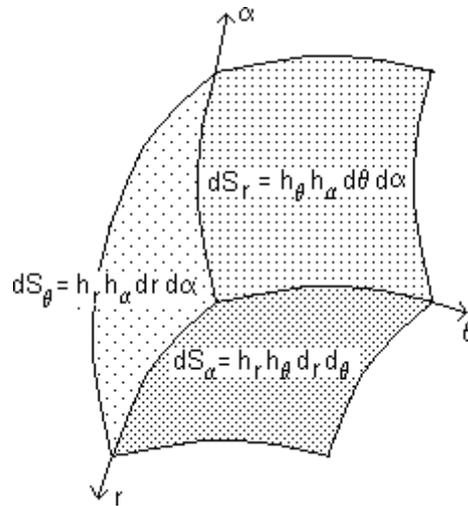


Figura a.1 - Sistema de coordenadas curvilíneas e os elementos de superfícies.

Conseqüentemente, um elemento de volume é dado por

$$dv = h_r h_\theta h_\alpha dr d\theta d\alpha. \quad (\text{A.15})$$

A.1.1 COORDENADAS CILÍNDRICAS

A Figura A.2 mostra as coordenadas cilíndricas, em que $\vec{P} = \vec{P}(r, \theta, z)$. As métricas são dadas por

$$h_r = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1; \quad (\text{A.16})$$

$$h_\theta = \sqrt{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = r; \quad (\text{A.17})$$

$$h_z = 1. \quad (\text{A.18})$$

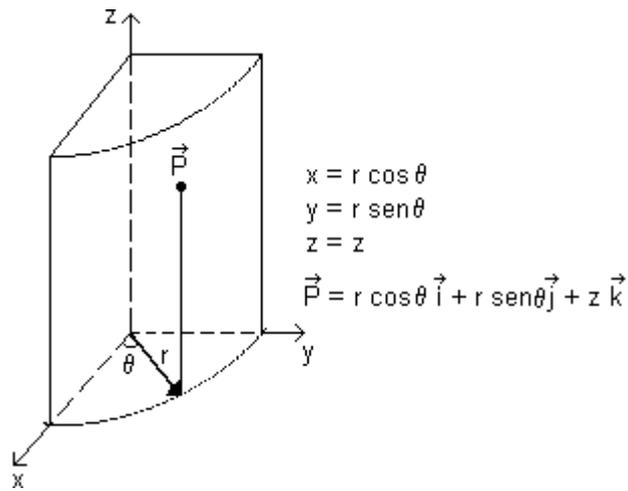


Figura A.2 - Coordenadas cilíndricas.

O vetor posição fica

$$d\vec{P} = dr \vec{e}_r + d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z. \quad (\text{A.19})$$

Os elementos de área são

$$dS_r = r d\theta dz \rightarrow S_r = 2\pi r h; \quad (\text{A.20})$$

$$dS_\theta = dr dz \rightarrow S_\theta = 2 r h; \quad (\text{A.21})$$

$$dS_z = r dr d\theta \rightarrow S_z = \pi r^2. \quad (\text{A.22})$$

Para o volume, tem-se

$$dv = r dr d\theta dz \rightarrow v = \pi r^2 h. \quad (\text{A.23})$$

A.1.2 COORDENADAS ESFÉRICAS

A Figura A.3 mostra as coordenadas esféricas, em que $\vec{P} = \vec{P}(r, \theta, \alpha)$. As métricas neste caso são

$$h_r = 1; \quad (\text{A.24})$$

$$h_\theta = r \cos \alpha; \quad (\text{A.25})$$

$$h_\alpha = r. \quad (\text{A.26})$$

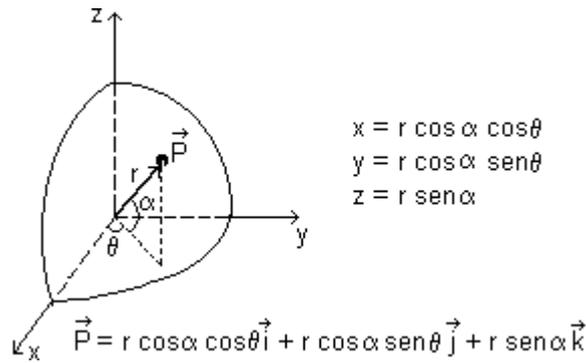


Figura A.3 - Coordenadas esféricas.

De forma semelhante, pode-se obter os elementos de área e volume conforme feito anteriormente.

A.1.3 GRADIENTE, DIVERGÊNCIA E ROTACIONAL EM COORDENADAS CURVILÍNEAS

GRADIENTE:

$$\nabla f = \frac{1}{h_r} \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{h_\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \vec{e}_\alpha. \quad (\text{A.27})$$

DIVERGÊNCIA:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_r h_\theta h_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial r} (V_r h_\theta h_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta h_r h_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (V_\alpha h_r h_\theta) \right]. \quad (\text{A.28})$$

ROTACIONAL:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{V} = & \frac{1}{h_\theta h_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (V_\alpha h_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (V_\theta h_\theta) \right] \vec{e}_r + \frac{1}{h_r h_\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (V_r h_r) - \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial r} (V_\alpha h_\alpha) \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{h_r h_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (V_\theta h_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (V_r h_r) \right] \vec{e}_\alpha. \quad (\text{A.29}) \end{aligned}$$

ALFABETO GREGO:

<i>Alfa</i>	A	α
<i>Beta</i>	B	β
<i>Gama</i>	Γ	γ
<i>Delta</i>	Δ	δ
<i>Épsilon</i>	E	ε
<i>Zeta</i>	Z	ζ
<i>Eta</i>	H	η
<i>Teta</i>	Θ	θ
<i>Iota</i>	I	ι
<i>Kapa</i>	K	κ
<i>Lambda</i>	Λ	λ
<i>Mu</i>	M	μ
<i>Nu</i>	N	ν
<i>Ksi</i>	Ξ	ξ
<i>Ômicron</i>	O	ο
<i>Pi</i>	Π	π
<i>Ro</i>	P	ρ
<i>Sigma</i>	Σ	σ
<i>Tau</i>	T	τ
<i>Úpsilon</i>	Y	υ
<i>Fi</i>	Φ	φ,ϕ
<i>Chi</i>	X	χ
<i>Psi</i>	Ψ	ψ
<i>Ômega</i>	Ω	ω