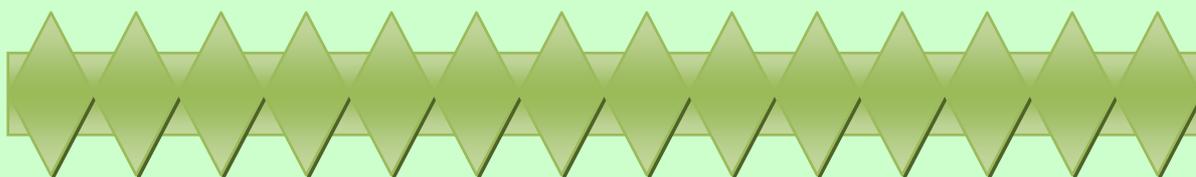




UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE TECNOLOGIA E RECURSOS NATURAIS
UNIDADE ACADÊMICA DE CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS



Cadernos de Dinâmica

Vol. I

Prof. Manoel F. Gomes Filho

Campina Grande – Paraíba

Julho de 2008

Apresentação

Este trabalho representa uma primeira tentativa de se produzir um texto em português que venha a servir de guia para as aulas de Meteorologia Dinâmica I tal como está previsto no elenco de disciplinas do Curso de Graduação em Meteorologia da recém criada UFCG. Ele foi produzido a partir das notas de aula preparadas pelo autor e está inteiramente baseado no livro “ An introduction to Dynamic Meteorology “ do autor James R. Holton. Evidentemente, todas as contribuições para correção do texto são bem vindas e com isso espera-se que no futuro, após o retorno dos interessados e usuários, sejam estudantes ou professores que se disponham a usa-lo, talvez transformar o rascunho em um texto final.

COLABORAÇÕES DECISIVAS

As seguintes colaborações foram decisivas para a realização deste projeto e sem elas provavelmente não se teria chegado ao resultado ora apresentado.

Fábio Guilherme (*)

Maria Luciene Dias (*)

Maytê Duarte Leal Coutinho (**)

Sheilla Christini Santana (*)

(*) Mestrandos em Meteorologia do Centro de Tecnologia e Recursos Naturais da UFCG.

(**) Estudante de meteorologia da UFG – contribuição para a presente edição.

CONTEÚDO

Parte 1 - Introdução aos movimentos atmosféricos

Introdução	04
Sistemas de coordenadas	04
Forças que aceleram os fluidos	06
A força do gradiente da pressão	06
A força gravitacional	08
O atrito ou força de viscosidade	09
A força centrífuga	10
A força de Coriolis	11

Parte 2 - As leis básicas de conservação

Introdução	12
A diferenciação total	12
Diferenciação total de um vetor para um sistema em rotação	13
A forma vetorial da equação do momentum em coordenadas girando	15
As equações componentes em coordenadas esféricas.....	16
Análise de escala das equações do movimento	21
A aproximação geostrófica e o vento geostrófico	22
Equações aproximadas de prognóstico: o número de Rossby	23
A equação da continuidade	25
A equação da continuidade em coordenadas isobáricas	26
O movimento vertical	27
Medida da divergência horizontal	28
Análise de escala da equação da continuidade	29
A equação da energia termodinâmica	30
Termodinâmica da atmosfera seca	33
Temperatura potencial	34
A lapse rate adiabática	35
A estabilidade estática	35

Análise de escala da equação da energia termodinâmica	37
---	----

Parte 3 - aplicações elementares das equações básicas

Introdução	39
Movimento horizontal sem atrito	39
Vento geostrófico em coordenadas isobáricas	40
Escoamento curvilíneo em equilíbrio	42
Coordenadas naturais	42
Movimento inercial	44
Escoamento ciclostrófico	44
Escoamento gradiente	45

Parte 4 - Circulação e vorticidade

Introdução	50
Vorticidade em coordenadas naturais	51
Vorticidades absoluta e relativa	53
Teorema da circulação	54
Vorticidade potencial	58
Equação da vorticidade	61
Análise dos termos da equação da vorticidade.....	62
Análise de escala da equação da vorticidade	63
Simplificações da equação da vorticidade.....	66

PARTE 1

INTRODUÇÃO AOS MOVIMENTOS ATMOSFÉRICOS

1. INTRODUÇÃO

Os movimentos em um fluido, resultam de perturbações de um estado de equilíbrio, que cessando o movimento, os fluidos reais tentarão atingir novamente.

O estudo de como é realizada essa perturbação resultando em movimento, ora pela termodinâmica ora por distúrbios mecânicos; das razões pelas quais certas trajetórias fluidas se desenvolvem e de como situações de equilíbrio são alcançadas, de modo que os movimentos coexistem harmonicamente com as perturbações, constituem a ciência da Dinâmica dos Fluidos. A aplicação dos conceitos e descobertas deste estudo dos movimentos da atmosfera é a tarefa principal da Meteorologia Dinâmica.

Os movimentos na atmosfera ocorrem em um espectro muito amplo, tanto na escala de tempo como na escala de espaço; desde os movimentos aleatórios das moléculas individuais à circulação média zonal que envolve a atmosfera inteira. As leis básicas da Dinâmica dos Fluidos descrevem todo espectro dos movimentos atmosféricos com exceção dos movimentos moleculares. Portanto, não constitui surpresa o fato de não haver solução geral para as equações que descrevem estas leis. Como consequência disto, para se obter os resultados desejados, essas equações devem ser simplificadas e formuladas de uma maneira a isolar os movimentos de interesse.

2. SISTEMAS DE COORDENADAS

O conceito de movimento está baseado nas informações observacionais de que a posição dos objetos mudam no tempo.

Para discutir o movimento de qualquer corpo ou parcela de ar quantitativamente, necessitamos de sistemas formais para detectar essas mudanças de posição. Antes de estabelecer um sistema de coordenadas, entretanto, devemos estabelecer um sistema de referência que possamos usar com base para nossas medidas.

Nosso corpo de referência na experiência cotidiana é naturalmente a Terra. Embora a verdade de uma lei física não possa ser alterada pela escolha de um sistema de referência ou um sistema de coordenadas, sua forma matemática pode ser simplificada consideravelmente. Uma tarefa natural do dinamicista é então pesquisar sistemas de referência nos quais as leis físicas tomam suas formas mais simples. Este é essencialmente o conteúdo da primeira lei de Newton: existem sistemas de referência nos quais um corpo não interagindo com qualquer outro corpo, permanecerá em repouso ou em movimento uniforme, se inicialmente possuía tal movimento. Tal sistema de referência é dito de Galileo ou Inercial. O termo inércia vem do fato de que as expressões das leis físicas da inércia tomam sua forma mais simples em tal

sistema de coordenadas: Se nenhuma força atua sobre o corpo, ele não experimentará aceleração.

Vamos supor que temos um sistema inercial composto de um corpo de referência e um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais (x, y, z) . Se a posição de um corpo não interagindo com qualquer outro corpo é denotado por \tilde{x} , então deve ser verdade neste sistema inercial que:

$$\frac{d^2 \tilde{X}}{d\tilde{X}^2} = \ddot{\tilde{X}} = 0 \quad (1.1)$$

Vamos transformar esse sistema em um outro sistema de coordenadas cartesianas com as relações:

$$\begin{aligned} X'_1 &= A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z \\ X'_2 &= A_{21}X + A_{22}Y + A_{23}Z \\ X'_3 &= A_{31}X + A_{32}Y + A_{33}Z \end{aligned} \quad (1.2)$$

No qual os A_{ij} são todos constantes. Obviamente neste sistema é verdadeiro que:

$$\ddot{X} = \ddot{X}' = \ddot{Y}' = \ddot{Z}' = 0 \quad (1.3)$$

devido a primeira relação. Este novo sistema é também inercial porque a aceleração não ocorre na ausência de forças. Vamos tentar uma outra transformação; esta dada por:

$$\begin{aligned} X' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t \\ Y' &= x \sin \omega t - y \cos \omega t \\ Z' &= z \end{aligned} \quad (1.4)$$

Neste caso, o novo sistema de coordenadas gira em torno do eixo z do sistema original com uma frequência angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$, onde T é o tempo necessário para uma rotação completa.

Agora nós temos:

$$\begin{aligned} \dot{X}' &= \dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t - \omega(x \sin \omega t - y \cos \omega t) \\ \dot{Y}' &= \dot{x} \sin \omega t + \dot{y} \cos \omega t - \omega(x \cos \omega t - y \sin \omega t) \\ \dot{Z}' &= \dot{z} \end{aligned} \quad (1.5)$$

se diferenciarmos novamente o sistema (1.5) e usarmos as relações (1.1) temos:

$$\begin{aligned} \ddot{X}' &= -2\omega(\dot{x} \sin \omega t - \dot{y} \cos \omega t) - \omega^2(x \cos \omega t + y \sin \omega t) \\ \ddot{Y}' &= 2\omega(\dot{x} \cos \omega t + \dot{y} \sin \omega t) - \omega^2(x \sin \omega t - y \cos \omega t) \\ \ddot{Z}' &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

Então, para nossa surpresa, neste sistema, o corpo aparece sendo acelerado mesmo quando não há forças atuando sobre ele. Este sistema, que gira, não é inercial. Há duas espécies de forças “aparentes” que surgem na relação (1.6): as primeiras são aquelas

envolvendo o produto de ω e as velocidades \dot{x} , \dot{y} e \dot{z} ; são chamadas forças de Coriolis. As segundas, são os produtos das coordenadas de posição e ω^2 e são chamadas de forças Centrífugas. Estas forças são perfeitamente reais e observáveis para um observador girando com um sistema X' . Estas são chamadas aparentes, porque não são devidas a interações com outros corpos. Desse modo, para aplicar a Mecânica Newtoniana à atmosfera, devemos encontrar um sistema inercial, tal que, possamos determinar a diferença entre acelerações reais e aquelas que resultam das transformações de coordenadas. Supõe-se geralmente que exista um sistema inercial em algum lugar do espaço, que escolhendo um sistema de referência baseado em estrelas “fixas” dará um sistema inercial. Mesmo fazendo esta suposição, temos que considerar a rotação da Terra, em relação a este sistema inercial, se quisermos estudar os movimentos da atmosfera, em um sistema de coordenadas que usa a Terra como sistema de coordenadas de referência.

3. FORÇAS QUE ACELERAM OS FLUIDOS

Se observarmos, a partir de um sistema inercial, os corpos que estão em movimento acelerado, podemos supor de acordo com a 2ª Lei do Movimento de Newton, que eles estão interagindo com algum outro corpo. A 2ª Lei diz que estas acelerações são produzidas por forças e então constituem uma definição de forças como um fenômeno natural que produz aceleração. Supondo então que descobrimos um sistema inercial, usaremos a 2ª Lei para escrever:

$$m \cdot a = F \quad (1.7)$$

Em meteorologia, é conveniente usar forças específicas que são forças por unidade de massa e então temos:

$$a = \sum_i f_i \quad (1.8)$$

onde a força total é dada pela soma das forças individuais.

$$F = m \sum_i f_i \quad (1.9)$$

No estudo da atmosfera nós temos forças devidas ao gradiente de pressão, gravitação e atrito. Existem outras (forças moleculares, eletromagnéticas por exemplo) mas estas três forças são as mais importantes na descrição macroscópica dos movimentos fluidos similares àqueles da baixa Troposfera.

4.FORÇA DO GRADIENTE DE PRESSÃO

Considere um elemento de volume de ar $\partial V = \partial x \partial y \partial z$, centrado no ponto (x_0, y_0, z_0) como visto na figura abaixo:

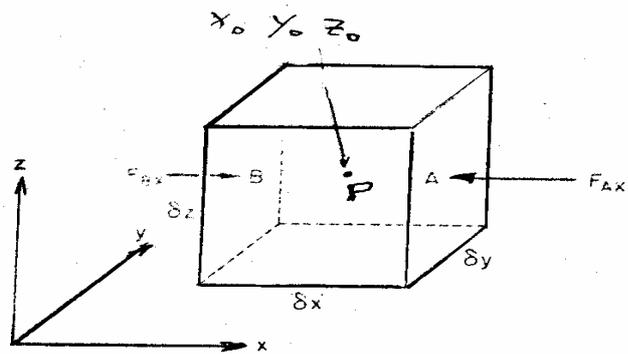


Figura 1.1 – a componente na direção x da força do gradiente da pressão atuando sobre um elemento do fluido

Devido aos movimentos moleculares que se processam de um modo aleatório, a quantidade de movimento está sendo continuamente transferida às paredes do elemento de volume, pelo ar circunvizinho. Esta transferência de quantidade de movimento por unidade de tempo e por unidade de área é exatamente a pressão exercida sobre as paredes do elemento de volume pelo ar contido nele. Se a pressão no centro do elemento de volume é chamada P_0 , então, a pressão sobre a parede A (ver figura), pode ser expressa como uma expansão em série de Taylor:

$$P_A = P_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \left[\frac{\delta x}{2} \right]^2 \frac{1}{2!} + (\text{termos de ordem superior}) \quad (1.10)$$

desprezando os termos de ordem 2 ou superior nesta expressão, a força da pressão atuando sobre o elemento de volume na parede A é:

$$F_{Ax} = - \left[p_0 + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \quad (1.11)$$

de maneira análoga:

$$F_{Bx} = \left[p_0 - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z \quad (1.12)$$

conseqüentemente, a componente líquida na direção x da força da pressão atuando sobre o volume é:

$$F_x = F_{Ax} + F_{Bx} = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (1.13)$$

A massa elemento diferencial de volume é simplesmente a densidade ρ vezes o volume:

$$m = \rho \delta x \delta y \delta z.$$

então, a componente x da força devido ao gradiente e pressão por unidade de massa é:

$$\frac{F_x}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.14)$$

Do mesmo modo, pode ser mostrado que as componentes y e z da força do gradiente de pressão por unidade de massa são:

$$\frac{F_y}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{F_z}{m} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.15)$$

tal que a força do gradiente de pressão é:

$$\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.16)$$

é importante notar que esta força é proporcional ao gradiente da pressão, tem mesma direção e sentido oposto a este.

5. FORÇA GRAVITACIONAL

A lei da gravitação universal de Newton determina que quaisquer dois elementos de massa, no universo, se atraem mutuamente com uma força proporcional a suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que os separa. Então, se dois elementos de massa M e m estão separadas por uma distância $r \equiv \left| \vec{r} \right|$ com o vetor \vec{r} dirigido na direção de m , a força exercida pela massa M sobre m devido a gravitação é:

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (1.17)$$

na qual G é uma constante universal chamada constante de gravitação ou gravitacional.

Se a Terra é designada como a massa M e m é uma massa elementar da atmosfera, então a força por unidade de massa exercida sobre a atmosfera, pela atração gravitacional da Terra é:

$$\frac{\vec{F}_g}{m} \equiv \vec{g}^* = -\frac{GMm}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (1.18)$$

Em Meteorologia Dinâmica é costume usar como uma coordenada vertical a altura acima do nível médio do mar. Se o raio médio da Terra é designado por a , e a distância acima do nível médio do mar é z , então desprezando os pequenos desvios da forma da Terra a partir da esfericidade, $r = a + z$. Portanto, a expressão anterior pode ser rescrita como:

$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}_o^*}{\left(1 + \frac{z}{a}\right)^2} \quad (1.19)$$

em que,

$$\mathbf{g}_o^* = -\frac{GM}{a^2} \begin{pmatrix} \rightarrow \\ r \\ r \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

É o valor da força gravitacional ao nível médio do mar. Para aplicações meteorológicas, $z \ll a$, tal que com erro desprezível nós podemos por $\mathbf{g}^* = \mathbf{g}_o^*$ e simplesmente tratar a força gravitacional como constante.

6.0 ATRITO OU FORÇA DE VISCOSIDADE

Muito embora uma discussão completa da força de viscosidade seria mais complicada, o conceito físico básico pode ser ilustrado muito simplesmente. Consideremos uma camada de um fluido incompressível confinada entre duas placas horizontais separadas por uma distância l como mostrado na figura abaixo:

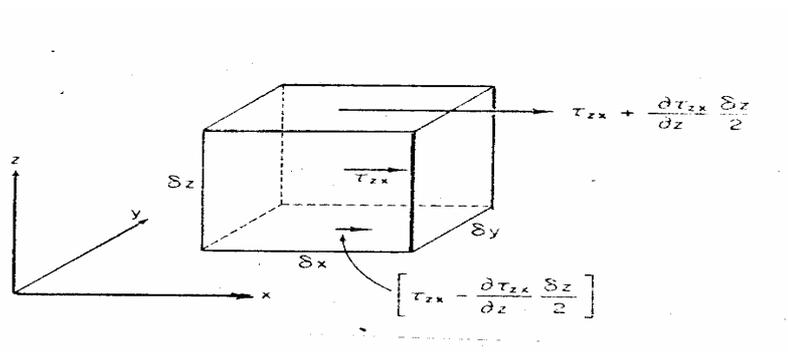


Figura 1.2 – a componente na direção x da tensão de cisalhamento vertical sobre um elemento de fluido

A placa inferior é fixa e a superior está se movendo na direção x a uma velocidade u_o . Nós encontramos que a força tangencial à placa superior necessária para mantê-la em movimento uniforme é proporcional a distância entre as placas, ou seja,

$$F = \mu \frac{A u_o}{l} \quad (1.21)$$

Onde μ é uma constante de proporcionalidade, o *coeficiente de viscosidade dinâmica*. Esta força deve ser exatamente igual à força exercida pela placa superior sobre o fluido imediatamente abaixo dela. Para um estado de movimento uniforme, cada camada horizontal do fluido deve exercer a mesma força sobre a camada de fluido imediatamente abaixo. Portanto, tomando o limite à medida que a camada limite tende para zero, nós podemos

escrever a força viscosa por unidade de área, ou *tensão de cisalhamento*, para este caso especial como:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.22)$$

Onde os índices z, x indicam que τ_{zx} é a componente da tensão cisalhante na direção x devido ao cisalhamento vertical da componente x da velocidade.

A partir do ponto de vista molecular, esta tensão cisalhante resulta de um transporte líquido para baixo de quantidade de movimento pelo movimento aleatório das moléculas.

Devido a que, a quantidade de movimento média na direção x aumenta com a altura, as moléculas passando para baixo através de um plano horizontal a qualquer distância, carregam mais quantidade de movimento do que as que passam por cima pelo mesmo plano.

Então, há um transporte líquido da quantidade de movimento na direção de x para baixo. Este transporte para baixo de quantidade de movimento por unidade de tempo e de área é simplesmente a tensão cisalhante.

7. A FORÇA CENTRÍFUGA

Consideremos um bola de massa m que está presa a uma corda e que gira com trajetória circular de raio r a uma velocidade angular constante ω . Do ponto de vista de um observador fixo no espaço, a velocidade instantânea da bola é constante mas, sua direção está variando continuamente tal que sua velocidade média não é constante.

Para calcular a aceleração nós consideramos a mudança na velocidade δV que ocorre para um incremento de tempo δt durante o qual a bola gira de um ângulo $\delta \theta$ segundo a figura abaixo.

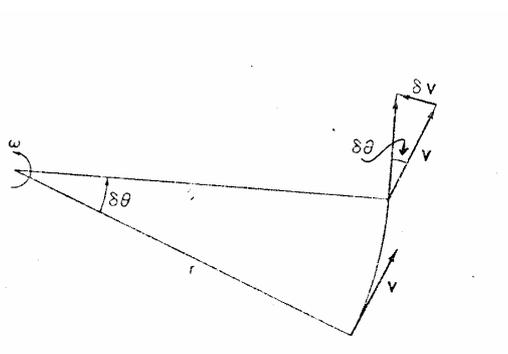


Figura 1.3 – a aceleração centrípeta

Desde que $\delta \theta$ é também o ângulo entre os vetores V e $V + \delta V$, o módulo de δV é exatamente

$$|\delta V| = |V| \delta \theta \quad (1.23)$$

Se dividirmos por δt e notarmos que no limite $\delta t \rightarrow 0$, δV está dirigido na direção do eixo de rotação, nós obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = |V| \frac{d\theta}{dt} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ -\vec{r} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

mas, $|\vec{V}| = \omega r$ e $\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega$, tal que $\frac{dV}{dt} = \omega^2 \vec{r}$

conseqüentemente, visto a partir de coordenadas fixas, o movimento é de aceleração uniforme dirigido na direção do eixo de rotação e igual ao quadrado da velocidade angular vezes a distância ao eixo de rotação. Esta aceleração é chamada de aceleração centrípeta. É causada pela força da corda puxando a bola.

Agora suponha que observamos o movimento em um sistema de coordenadas girando com a bola. Neste sistema girando. A bola está estacionária mas, existe uma força atuando sobre a bola e puxando-a para fora da corda. Conseqüentemente, para aplicar a 2ª Lei de Newton para descrever o movimento relativo a este sistema de coordenadas nós devemos incluir uma força aparente adicional; a força centrífuga, que exatamente equilibra a força da corda sobre a bola. Então a força centrífuga é equivalente a reação inercial da bola sobre a corda e é exatamente igual e oposta a aceleração centrípeta.

Resumindo: observada de um sistema fixo a bola girando experimenta uma aceleração centrípeta constante em resposta à força exercida pela corda. Observada de um sistema girando com ela, a bola está estacionária e a força exercida pela corda é equilibrada por uma força centrífuga.

6. FORÇA DE CORIOLIS

Uma Segunda força aparente, necessária para manter válida a 2ª Lei de Newton para um sistema não Newtoniano é a força de Coriolis. Suponha que um objeto é posto em movimento uniforme com respeito a um sistema inercial de coordenadas. Se o objeto é observado a partir de um sistema girando com eixo de rotação perpendicular ao plano de movimento, o caminho parecerá curvado, como visto na figura abaixo:

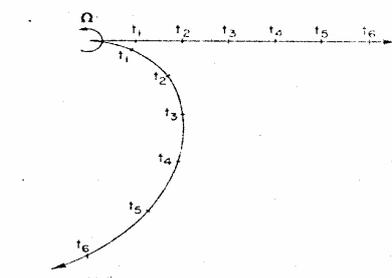


Figura 1.4 – movimento inercial como visto a partir de um sistema inercial (linha reta) e de um sistema em rotação (linha curva)

Movimento inercial como visto a partir de um sistema newtoniano (linha reta) e um sistema não-newtoniano (linha curva).

Esse procedimento indica que para um alto grau de precisão o campo da pressão está em equilíbrio hidrostático, ou seja, a pressão em qualquer ponto é simplesmente igual ao peso de uma coluna de seção transversal unitária do ar acima daquele ponto.

Parte 2

AS LEIS BÁSICAS DE CONSERVAÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Os movimentos atmosféricos são governados por três princípios físicos fundamentais que são: conservação de massa, conservação da quantidade de movimento (momentum) e conservação da energia. As relações matemáticas que expressam estas leis podem ser obtidas por considerações de equilíbrio (balanço) de massa, quantidade de movimento e energia, para um *volume de controle* infinitesimal dentro do fluido. Dois tipos de volume de controle são normalmente utilizados na dinâmica dos fluidos. No sistema de referência Euleriano o volume de controle consiste de um paralelepípedo de lados δx , δy , e δz cuja posição é fixa relativa aos eixos coordenados. Balanços de massa, momentum e energia, dependerão dos fluxos devidos ao escoamento do fluido, através dos contornos do volume de controle. No sistema de referência Lagrangeano, contudo, o volume de controle consiste de uma massa infinitesimal de partículas do fluido, que se movem seguindo o movimento, e sempre contendo as mesmas partículas do fluido.

O sistema de referência Lagrangeano, é particularmente usado para se obter as leis de conservação, desde que tais leis, podem ser enunciadas mais simplesmente, em termos de um elemento particular de massa do fluido. O sistema Euleriano é, entretanto, mais conveniente para resolver a maioria dos problemas, porque nesse sistema, os campos das variáveis são relacionados por um conjunto de equações diferenciais parciais, nas quais, as variáveis independentes são coordenadas x , y , z , t . No sistema Lagrangeano, por outro lado, é necessário seguir a evolução no tempo, dos campos para várias parcelas individuais do fluido. Então, as variáveis independentes são x_0 , y_0 , z_0 , e t , onde essas variáveis x_0 , y_0 , z_0 , representam a posição pela qual uma parcela particular passou no tempo de referência t_0 .

2. A DIFERENCIAÇÃO TOTAL

As leis de conservação que serão derivadas a partir daqui contém expressões para a taxa de variação por unidade de volume da massa, quantidade de movimento (momentum) e energia termodinâmica, seguindo o movimento de uma parcela particular do fluido. Para que possamos aplicar essas leis no sistema de referência Euleriano é necessário obter uma relação entre a taxa de variação de um campo variável seguindo o movimento e sua taxa de variação em um ponto fixo. A primeira é chamada a derivada *substantiva* ou *total*, enquanto a última é chamada derivada *local*; ela é simplesmente uma derivada parcial com respeito ao tempo. Para se obter uma relação entre a derivada total e a derivada local é conveniente nos referirmos a um campo variável em particular, a temperatura, por exemplo. Suponha que a

temperatura medida sobre um balão que se move com o vento é T_0 em um ponto de coordenadas x_0, y_0, z_0 e tempo t_0 . Se o balão se move para o ponto $x_0 + \delta x, y_0 + \delta y$ e $z_0 + \delta z$ em um incremento de tempo δt , então a variação na temperatura registrada no balão δT pode ser expressa por uma expansão em série de Taylor como,

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta z + (\text{termos de altas ordens})$$

dividindo por δt e tomando o limite quando $\delta t \rightarrow 0$, nós obtemos:

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \frac{dz}{dt}$$

onde,

$$\frac{dT}{dt} \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta T}{\delta t}$$

é a taxa de variação de T seguindo o movimento. Se agora nós pusermos,

$$\frac{dx}{dt} \equiv u, \quad \frac{dy}{dt} \equiv v \quad e \quad \frac{dz}{dt} \equiv w$$

então u, v, w , são as componentes da velocidade nas direções x, y, z , respectivamente e nós teremos,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (2.1)$$

usando notação vetorial, esta expressão pode ser re-escrita como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \vec{V} \cdot \nabla T$$

na qual, $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$ é o vetor velocidade tri-dimensional e o termo $-\vec{V} \cdot \nabla T$ é chamado de *advecção de temperatura*. Ela contribui para a variação local da temperatura devida ao movimento do ar. Por exemplo, se o vento está fluindo de uma região fria para uma região mais quente, ela será negativa (advecção fria) e o termo de advecção contribuirá negativamente para a variação local da temperatura. Então, a taxa de variação local da temperatura é igual à taxa de variação da temperatura seguindo o movimento (que é o aquecimento ou e resfriamento das parcelas de ar individuais) mais a taxa advectiva de variação da temperatura.

3. DIFERENCIAÇÃO TOTAL DE UM VETOR PARA UM SISTEMA EM ROTAÇÃO

A lei de conservação da quantidade de movimento de Newton (segunda lei) relaciona a taxa de variação da quantidade de movimento absoluta seguindo o movimento em um sistema de referência inercial às forças atuando sobre o fluido. Para a maioria das aplicações em meteorologia, é desejável que o movimento seja referido a um sistema solidário com a terra. A transformação da equação do momentum para um sistema de coordenadas em rotação

necessita de uma relação entre a derivada total de um vetor em um sistema inercial e a correspondente derivada total em um sistema que gira. Para derivar esta relação, vamos fazer \vec{A} ser um vetor arbitrário cujas componentes cartesianas em um sistema inercial são dadas por

$$A = \vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z$$

e cujas componentes em um sistema com rotação com uma velocidade angular Ω , são :

$$A = \vec{i}' A'_x + \vec{j}' A'_y + \vec{k}' A'_z$$

fazendo $\frac{d_a \vec{A}}{dt}$ ser a derivada total do vetor \vec{A} no sistema inercial tal que possamos escrever

$$\begin{aligned} \frac{d_a \vec{A}}{dt} &= \vec{l} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt} \\ &= \vec{l}' \frac{dA'_x}{dt} + \vec{j}' \frac{dA'_y}{dt} + \vec{k}' \frac{dA'_z}{dt} = \frac{d \vec{l}'}{dt} A'_x + \frac{d \vec{j}'}{dt} A'_y + \frac{d \vec{k}'}{dt} A'_z \end{aligned}$$

agora, desde que

$$\zeta_g = \nabla^2 \phi / f_0 \quad \text{e} \quad \vec{V}_g = \vec{k} \times \nabla \phi / f_0$$

é exatamente a derivada total de \vec{A} como visto no sistema de coordenadas em rotação (que é, a taxa de variação de \vec{A} seguindo o movimento relativo). Conseqüentemente, desde que \vec{l}' pode ser pensado como um vetor posição de módulo unitário, $\frac{d \vec{j}'}{dt}$ é a velocidade de \vec{l}'

devido à sua rotação. Então, $\frac{d \vec{l}'}{dt} = \Omega x \vec{i}'$ e de um modo semelhante, $\frac{d \vec{j}'}{dt} = \Omega x \vec{j}'$ e

$$\frac{d \vec{k}'}{dt} = \Omega x \vec{k}' .$$

Então, juntando as três componentes, teremos,

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{d \vec{A}}{dt} + \Omega x \vec{A} \quad (2.2)$$

que é a relação procurada.

4. A FORMA VETORIAL DA EQUAÇÃO DE MOMENTUM EM COORDENADAS EM ROTAÇÃO

Em um sistema de referência inercial, a segunda lei do movimento de Newton pode ser escrita simbolicamente como

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \sum \vec{F} \quad (2.3)$$

O lado esquerdo dessa equação representa a taxa de variação da velocidade absoluta seguindo o movimento como visto de um sistema inercial. O lado direito, representa a soma das forças reais *por unidade de massa* que estão atuando. Agora vamos transformar essa expressão para a segunda lei, para o sistema de referência com rotação, para isso teremos que encontrar primeiro uma relação entre a velocidade absoluta e a velocidade relativa ao sistema em rotação. Esta relação pode ser obtida aplicando-se a expressão (2.2) ao vetor posição \vec{r} para uma sobre uma terra girando:

$$\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d \vec{r}}{dt} + \Omega x \vec{r} \quad (2.4)$$

convém lembrar que, $\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \vec{V}_a$ e que $\frac{d \vec{r}}{dt} = \vec{V}$; conseqüentemente (2.4) pode ser escrita como

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \Omega x \vec{r} \quad (2.5)$$

a qual determina simplesmente que a velocidade absoluta de um objeto sobre uma terra em rotação é igual a sua velocidade relativa à terra mais a velocidade devida a própria rotação da terra. Agora devemos aplicar (2.2) ao vetor velocidade absoluta \vec{V}_a para obter

$$\frac{d \vec{V}_a}{dt} = \frac{d \vec{V}_a}{dt} + \Omega x \vec{V} \quad (2.6)$$

substituindo a partir de (2.5) no lado direito de (2.6), encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{d \vec{V}_a}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{V} + \Omega x \vec{V}) + \Omega x (\vec{V} + \Omega x \vec{V}) \\ &= \frac{d \vec{V}}{dt} + 2\Omega x \vec{V} - \Omega^2 R \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde Ω é suposto constante. Aqui \mathbf{R} é um vetor perpendicular ao eixo de rotação, com magnitude igual à distância a esse eixo, tal que, com a ajuda da identidade vetorial,

$$\Omega x (\Omega x \vec{r}) = \Omega x (\Omega x \vec{R}) \equiv -\Omega^2 R$$

A equação (2.7) determina que a aceleração seguindo o movimento em um sistema inercial é igual a aceleração seguindo o movimento relativo em um sistema girando mais as acelerações de Coriolis e centrípeta. Se supomos que somente as forças reais que atuam sobre a atmosfera são a força do gradiente da pressão, a força de gravitação e a força de atrito, podemos reescrever a segunda lei de Newton (2.3) com a ajuda de (2.7) como

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -2\Omega \times \vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} + \vec{F}_r \quad (2.8)$$

onde \vec{F}_r é a força de atrito e a força centrífuga foi combinada com a gravitação no termo de gravidade \mathbf{g} . A equação (2.8) é o enunciado da segunda lei do movimento de Newton para movimento relativo a um sistema de coordenadas com rotação. Ela determina que a aceleração seguindo o movimento relativo no sistema de referência em rotação é igual a soma das forças de Coriolis, do gradiente da pressão, gravidade efetiva e atrito. Esta é a forma da equação do movimento que é básica para a maioria dos trabalhos em meteorologia dinâmica.

5. AS EQUAÇÕES COMPONENTES EM COORDENADAS ESFÉRICAS

Para fins de análise teórica e previsão numérica, é necessário expandir a equação do momentum na forma vetorial (2.8) em suas componentes escalares. Desde que o desvio a forma da terra se desvia pouco da esfericidade e por isso é desprezível, é conveniente expandir (2.8) em coordenadas esféricas tal que a superfície da terra (considerada de nível) corresponda a uma superfície coordenada. Os eixos coordenados são então (λ, ϕ, z) onde λ é a longitude, ϕ a latitude e z a distância vertical acima da superfície da terra. Se os vetores unitários

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w \\ u &\equiv r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v \equiv r \frac{d\phi}{dt}, \quad w \equiv \frac{dz}{dt} \\ dx &= a \cos \phi d\lambda \\ \frac{d\vec{V}}{dt} &= \vec{i} \frac{du}{dt} + \vec{j} \frac{dv}{dt} + \vec{k} \frac{dw}{dt} + u \frac{d\vec{i}}{dt} + v \frac{d\vec{j}}{dt} + w \frac{d\vec{k}}{dt} \\ \frac{d\vec{i}}{dt} &= u \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \end{aligned}$$

são agora tomados como sendo dirigidos para leste, norte e para cima respectivamente, a velocidade relativa se torna

$$\vec{V} = \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w$$

na qual as componentes u, v, w são definidas como:

$$u \equiv r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v \equiv r \frac{d\phi}{dt}, \quad w \equiv \frac{dz}{dt} \quad (2.9)$$

Aqui, \mathbf{r} é a distância ao centro da terra, que está relacionada a \mathbf{z} por $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \mathbf{z}$, onde \mathbf{a} é o raio da terra. Tradicionalmente, a variável \mathbf{r} em (2.9) é substituída pela constante \mathbf{a} . Esta é uma boa aproximação desde que $\mathbf{z} \ll \mathbf{a}$ para regiões de interesse para os meteorologistas. Para simplicidade na notação convencionou-se definir x e y como as distâncias para leste e norte tal que

$$dx = a \cos \phi d\lambda \quad dy = a d\phi.$$

Então, as componentes horizontais da velocidade são respectivamente $\mathbf{u} \equiv d\mathbf{x}/dt$ e $\mathbf{v} \equiv d\mathbf{y}/dt$ nas direções leste e norte respectivamente. O sistema de coordenadas (x, y, z) definido desta maneira não é, entretanto, um sistema de coordenadas cartesiano porque as direções de \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , não são constantes, mas são funções da posição sobre uma terra esférica. Esta dependência da posição dos vetores unitários deve ser levada em conta quando o vetor aceleração é expandido em suas componentes sobre a esfera. Então, podemos escrever

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i} \frac{du}{dt} + \vec{j} \frac{dv}{dt} + \vec{k} \frac{dw}{dt} + u \frac{d\vec{i}}{dt} + v \frac{d\vec{j}}{dt} + w \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (2.10)$$

Para se obter as equações das componentes, é necessário que se avalie primeiro as taxas de variações dos vetores unitários seguindo o movimento. Consideramos primeiro $\frac{d\vec{i}}{dt}$

Expandindo a derivada total como dado na equação (2.1) e notando que \vec{i} é uma função somente de \mathbf{x} , ou seja, um vetor dirigido para leste que não muda sua orientação mesmo que o movimento esteja dirigido para norte ou vertical, encontramos que

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = u \frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$$

a partir da figura 2.1, pode-se ver que

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta \vec{i}|}{\delta x} = \left| \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \right| = \frac{1}{a \cos \phi}$$

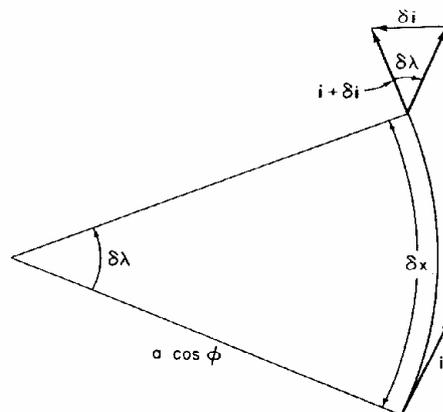


Figura 2.1 dependência longitudinal do vetor unitário \vec{i}

e que o vetor $\frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$ está dirigido na direção do eixo de rotação. Então, como ilustrado na figura 2.2 abaixo

$$\frac{\partial \vec{i}}{\partial x} = \frac{1}{a \cos \phi} (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi)$$

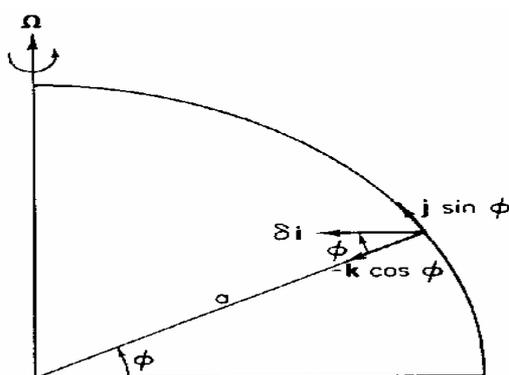


Figura 2.2 - Resolução de $\delta \vec{i}$ em componentes para norte e vertical.

Conseqüentemente,

$$\frac{d \vec{i}}{dt} = \frac{u}{a \cos \phi} (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi) \quad (2.11)$$

considerando agora $\frac{d \vec{j}}{dt}$, vê-se que \vec{j} é uma função somente de x e y . Então, com a ajuda de figura 2.3, pode-se notar que para movimentos na direção leste, $|\delta \vec{j}| = \frac{\delta x}{(a / \tan \phi)}$. Desde

que o vetor $\frac{\partial \vec{j}}{\partial x}$ está dirigido na direção negativa do eixo dos x , temos então que

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial x} = -\frac{\vec{k}}{a}$$

então,

$$\frac{d \vec{j}}{dt} = -\frac{u \tan \phi}{a} \vec{i} - \frac{v}{a} \vec{k} \quad (2.12)$$

Finalmente, por argumentos similares pode ser mostrado que

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{i} \frac{u}{a} + \vec{j} \frac{v}{a} \quad (2.13)$$

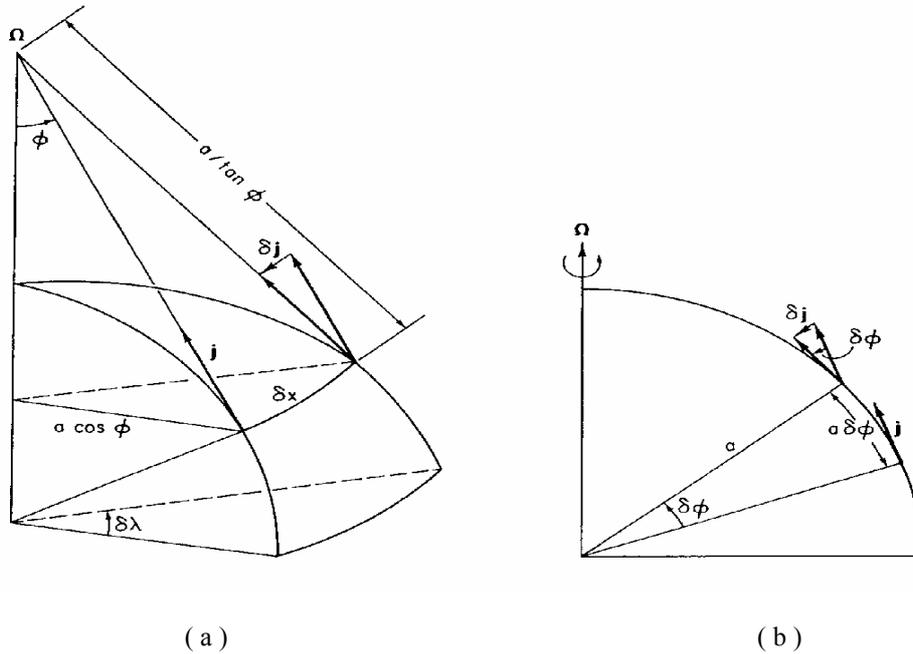


Figura 2.3 - a) A dependência do vetor unitário \vec{j} sobre a longitude

b) A dependência do vetor unitário \vec{j} sobre a latitude

Substituindo as equações de (2.11) a (2.13) na equação (2.10) e re-arranjando os termos, nós obtemos a expansão em coordenadas esféricas polares da aceleração seguindo o movimento relativo, que é:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} \right) \vec{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{wv}{a} \right) \vec{j} + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} \right) \vec{k} \quad (2.14)$$

a seguir voltamos a expansão em componentes dos termos da força em (2.8). A força de Coriolis é expandida notando-se que o vetor Ω não tem componente paralelo a \vec{i} , e que suas componentes paralelas a \vec{j} e \vec{k} são $2\Omega \cos \phi$ e $2\Omega \sin \phi$, respectivamente. Então, usando a definição do produto vetorial,

$$\begin{aligned} -2\Omega \times \vec{V} &= -2\Omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ &= -(2\Omega w \cos \phi - 2\Omega v \sin \phi) \vec{i} - 2\Omega u \sin \phi \vec{j} + 2\Omega u \cos \phi \vec{k} \end{aligned} \quad (2.15)$$

a força do gradiente da pressão pode ser expressa como

$$\nabla p = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.16)$$

e a gravidade é convenientemente representada como

$$\vec{g} = -g \vec{k} \quad (2.17)$$

onde g é um escalar positivo ($g \approx 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ na superfície da terra). Finalmente, a força de atrito é expandida em componentes com

$$\vec{F}_r = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y + \vec{k} F_w \quad (2.18)$$

substituindo (2.14) a (2.18) na equação do movimento (2.8) e igualando todos os termos nas direções das coordenadas \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , respectivamente, nós obtemos:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega w s \sin \phi - 2\Omega v \cos \phi + F_x \quad (2.19)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega w s \sin \phi + F_y \quad (2.20)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u c \cos \phi + F_z \quad (2.21)$$

que são as componentes para leste, norte e vertical da equação do movimento respectivamente. Os termos proporcionais a $1/a$ no lado direito das equações de (2.19) a (2.21) são chamados termos de curvatura porque eles surgem devido à curvatura da terra. Esses termos devido a que são não-lineares, ou seja, são quadráticos nas variáveis dependentes, eles são difíceis de manusear em análises teóricas. Felizmente, como será visto adiante, esses termos de curvaturas terão importância menor para os sistemas de escala sinótica nas latitudes médias. Ainda assim, mesmo quando os termos de curvatura são desprezados as equações (2.19) a (2.21) ainda são diferenciais parciais não-lineares como pode ser visto quando expandimos suas derivadas totais em partes locais e advectivas:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

Em geral os termos de aceleração advectiva são comparáveis em termos de ordem de magnitude ao termo da aceleração local. É principalmente pela presença dos processos de advecção não-lineares que faz da meteorologia dinâmica um assunto interessante.

6. ANÁLISE DE ESCALA DAS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

Como as equações usadas na meteorologia são equações completamente gerais, uma das maneiras de se filtrar movimentos indesejáveis sem interesse para a meteorologia é a *análise de escala*. A eliminação de termos por considerações de escala não tem somente a vantagem de simplificar a matemática do problema mas também, como vamos ver adiante, a eliminação de pequenos termos que em alguns casos tem a propriedade muito importante de eliminar completamente ou *filtrar* um tipo de movimento sem interesse para a meteorologia. O conjunto de equações do movimento (2.19) a (2.21) descreve todo tipo e escala dos movimentos atmosféricos. Ondas de som, por exemplo, são soluções perfeitamente válidas destas equações. Entretanto, as ondas de som são de pouca importância para os problemas meteorológicos. De modo a simplificar o sistema (2.19) a (2.21) para movimentos de escala sinótica nas latitudes médias definimos as seguintes escalas características do campo das variáveis baseadas em valores observados para sistemas de escala sinótica nas latitudes médias.

A flutuação horizontal da pressão Δp está normalizada pela densidade ρ de modo a produzir uma escala estimativa que é válida em todas as alturas na troposfera a despeito do decréscimo aproximadamente exponencial com altura de tanto Δp como ρ . Note que $\Delta p/\rho$ tem unidades de geopotencial.

Tabela 2.1 – Escalas características para os movimentos de escala sinótica

$U \sim 10 \text{ m s}^{-1}$	escala de velocidade horizontal
$W \sim 1 \text{ cm.s}^{-1}$	escala de velocidade vertical
$L \sim 10^6 \text{ m}$	escala de comprimento [$\sim 1/(2\pi)$ comprimentos de onda]
$D \sim 10^4 \text{ m}$	escala de profundidade
$\Delta p/\rho \sim 10^3 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$	escala de flutuação horizontal da pressão
$L / U \sim 10^5 \text{ s}$	escala de tempo

Voltando à equação (1.21) vemos que verdadeiramente a magnitude da flutuação de $\Delta p/\rho$ sobre uma superfície de altura constante deve ser igual a magnitude da flutuação do geopotencial sobre uma superfície isobárica. A escala de tempo aqui é uma escala de tempo advectiva que é apropriada para sistemas de pressão que se movem a uma velocidade aproximadamente igual a do vento horizontal, tal como é observado para sistemas sinóticos de latitudes médias. Então, L / U é o tempo requerido para um desses sistemas se deslocar de uma distância L com velocidade U . Deve ser salientado aqui que a velocidade vertical na escala sinótica não é uma quantidade medida diretamente. Entretanto, como será visto adiante, a magnitude de w pode ser deduzida a partir do conhecimento do campo de velocidade horizontal. Podemos agora estimar a magnitude de cada termo nas equações (2.19) e (2.20)

para movimentos de escala sinótica a uma dada latitude. É conveniente considerar distúrbios centrados na latitude de $\phi_0 = 45^\circ$ e introduzir a notação

$$f_0 = 2\Omega \sin \phi_0 = 2\Omega \cos \phi_0 \cong 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

Tabela 2.2 – Ordem de magnitude dos termos das componentes da equação do movimento

	A	B	C	D	E	F
componente x	$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega v \sin \phi$	$+2\Omega w \cos \phi$	$\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$
componente y	$\frac{dv}{dt}$	$+2\Omega u \sin \phi$		$\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \tan \phi}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$
escala típica	$\frac{U^2}{L}$	$f_0 U$	$f_0 W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\Delta p}{\rho L}$
ordem dos termos (m s^{-2})	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}

A tabela 2.2 mostra a magnitude característica de cada um dos termos nas equações (2.19) e (2.20) baseados nas considerações de escala. Os termos de atrito não estão incluídos por que na escala de tempo dos movimentos sinóticos, dissipação friccional tem um papel secundário de pouca importância acima do primeiro quilômetro da atmosfera. Ele é de grande importância na discussão dos movimentos na Camada Limite Planetária.

7. A APROXIMAÇÃO GEOSTRÓFICA E O VENTO GEOSTRÓFICO

Pode ser visto da tabela 2.2 que para distúrbios de escala sinótica de latitudes médias a Força de Coriolis (termo B) e a força do gradiente da pressão (termo F) estão aproximadamente em equilíbrio. Portanto, retendo somente estes termos nas equações (2.19) e (2.20), nos obtemos, como uma primeira aproximação a *relação geostrófica*

$$-fv \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad fu \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.22)$$

onde $f \equiv 2\Omega \sin \phi$ é chamado de *parâmetro de Coriolis*. O balanço geostrófico é uma relação diagnóstico que dá uma relação aproximada entre os campos da pressão e da velocidade horizontal nos sistemas de escala sinótica. A aproximação (2.22) não contém qualquer referência ao tempo e conseqüentemente não pode ser usada para prever a evolução do campo de velocidades. Ela é, por esta razão, uma relação de diagnóstico.

Por analogia com a relação (2.22) é possível definir um campo de velocidade horizontal $\vec{V}_g = \vec{i} u_g + \vec{j} v_g$ chamado de *vento geostrófico*, que satisfaz a equação (2.22) identicamente.

Então na forma vetorial

$$\vec{V}_g \equiv k \times \frac{1}{\rho f} \nabla p \quad (2.23)$$

Então, o conhecimento da distribuição da pressão em qualquer tempo determina o vento geostrófico. Deve ser lembrado que a equação (2.23) sempre define o vento geostrófico; mas somente para movimentos de grande escala o vento geostrófico deve substituir o vento horizontal real. Para as escalas usadas na tabela 2.2 o vento geostrófico somente aproxima o vento horizontal real dentro de 10-15% nas latitudes médias.

8. EQUAÇÕES APROXIMADAS DE PROGNÓSTICO; O NÚMERO DE ROSSBY

Para se obter equações prognósticas, é necessário reter os termos de aceleração (termo A) nas equações (2.19) e (2.20). As equações resultantes são as equações aproximadas para o momentum horizontal

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.24)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (2.25)$$

Nossa análise de escala mostrou que os termos de aceleração nas equações (2.24) e (2.25) são aproximadamente uma ordem de magnitude menor que as forças de Coriolis e do gradiente da pressão. O fato de que o escoamento horizontal está em equilíbrio geostrófico é de ajuda para a análise diagnóstica. Contudo, isto torna as aplicações reais destas equações na previsão do tempo difícil porque as acelerações (que devem ser medidas acuradamente) são dadas por pequena diferença entre dois termos grandes. Então, um pequeno erro na medida de ambas velocidades ou na força do gradiente da pressão, levará a um grande erro na estimativa das acelerações.

Uma medida conveniente da magnitude da aceleração, comparada com a força de Coriolis pode ser obtida, formando-se a razão entre as escalas características para a aceleração horizontal e a força de Coriolis,

$$\frac{U^2/L}{f_0 U}$$

esta razão é um número adimensional chamado número de Rossby, deduzido primeiramente pelo meteorologista sueco C. G. Rossby [1898 – 1957], designado por

$$R_0 \equiv \frac{U}{f_0 L}$$

Então, quanto menor for o número de Rossby, melhor será a medida da validade da aproximação geostrófica.

9. A APROXIMAÇÃO HIDROSTÁTICA

Uma análise de escala similar pode ser aplicada à componente vertical da equação do momentum (2.21). Desde que a pressão decresce de cerca de uma ordem de magnitude a partir do solo até a tropopausa, o gradiente vertical da pressão pode ser escalonado por P_0/H

onde P_0 é a pressão à superfície e H é a profundidade da troposfera. Os termos em (2.21) podem então ser estimados para movimentos de escala sinótica e são mostrados na tabela 2.3. Do mesmo modo que para os termos das componentes horizontais, consideramos movimentos centrados na latitude de 45° e desprezamos o atrito. A análise de escala indica que com alto grau de acurácia o campo da pressão está em equilíbrio hidrostático, ou seja, a pressão em qualquer ponto é simplesmente igual ao peso de uma coluna de ar se seção transversal unitária sobre aquele ponto.

A análise vista acima da equação do momentum vertical é, entretanto, insuficiente para mostrar que a aceleração vertical é pequena comparada a \mathbf{g} . Desde que somente aquela parte do campo da pressão que varia horizontalmente está diretamente acoplada ao campo da velocidade horizontal, é realmente necessário mostrar que a componente da pressão que varia horizontalmente está por si somente em equilíbrio hidrostático com o campo da densidade variando horizontalmente. Para fazer isto é conveniente primeiro definir uma pressão padrão $p_0(z)$, que é uma pressão média horizontal a cada altura, e uma correspondente densidade padrão $\rho_0(z)$, definida tal que $p_0(z)$ e $\rho_0(z)$ estão em *exato* equilíbrio hidrostático:

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} \equiv -g \quad (2.26)$$

nós podemos então escrever os campos da pressão e densidade total como

$$\begin{aligned} p(x, y, z, t) &= p_0(z) + p'(x, y, z, t) \\ \rho(x, y, z, t) &= \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde p' e ρ' são perturbações a partir dos valores padrões da pressão e densidade. Para uma atmosfera em repouso, p' e ρ' seriam então iguais a zero.

Tabela 2.3 – análise de escala para a equação do momentum vertical.

componente z da equação do momentum	$\frac{dw}{dt}$	$-2\Omega u \cos \phi$	$-\frac{u^2 + v^2}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$
escala dos termos	$\frac{UW}{L}$	$f_0 U$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{P_0}{\rho H}$	g
magnitude dos termos (m.s^{-2})	10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10	10

Usando as definições (2.26) e (2.27) supondo que $\frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1$ em magnitude tal que

$$(\rho_0 + \rho')^{-1} \cong \rho_0^{-1} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \quad \text{nós encontramos que}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g &= -\frac{1}{(\rho_0 + \rho')} \frac{\partial}{\partial z} (p_0 + p') - g \\
&\cong \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\rho'}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right] = -\frac{1}{\rho_0} \left[\rho' g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right]
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Para movimentos de escala sinótica, os termos em (2.28) tem magnitudes

$$\frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\partial p'}{\partial z} \right] \approx \frac{1}{\rho_0} \left[\frac{\Delta P}{\rho_0 H} \right] \approx 10^{-1} \text{ m.s}^{-2}, \quad \frac{\rho' g}{\rho_0} \approx 10^{-1} \text{ m.s}^{-2}$$

comparando estas magnitudes com as magnitudes dos outros termos na equação do momentum vertical (tabela 2.3), vemos que com uma boa aproximação, o campo da perturbação na pressão está em equilíbrio hidrostático com o campo da perturbação na densidade, tal que

$$\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho' g = 0 \tag{2.29}$$

conseqüentemente, para movimentos de escala sinótica, as acelerações verticais são desprezíveis e a velocidade vertical não pode ser determinada a partir da equação do momentum vertical.

10. A EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Foi visto até agora que os movimentos atmosféricos ou parte destes, podem ser descritos a partir de uma única lei básica – a segunda lei do movimento de Newton. Contudo, pouco foi dito acerca do movimento vertical na atmosfera. Vimos a partir de argumentos de escala que a componente vertical da equação do movimento não pode ser usada diretamente para se calcular o movimento vertical devido ao fato de que os sistemas de escala sinótica estão aproximadamente em equilíbrio hidrostático.

Vamos considerar agora uma Segunda lei física básica – a lei de conservação da massa, que relaciona os campos dos movimentos horizontal e vertical. Neste princípio de conservação da massa, o campo do movimento vertical pode ser deduzido a partir de medidas do campo de velocidade horizontal. Veremos posteriormente, que existem dificuldades práticas na aplicação deste método.

A expressão matemática deste princípio pode ser deduzida considerando-se um elemento de volume no espaço e calculando-se a taxa líquida de fluxo de massa através das faces do elemento de volume. Mostra-se então que a taxa de entrada de massa no elemento de volume é igual ao acréscimo de massa por unidade de volume.

$$-\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

Então, o acréscimo de massa por unidade de volume é exatamente a taxa de variação local da densidade $\frac{\partial \rho}{\partial t}$

portanto,
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.30)$$

A equação (2.30) é a forma da divergência de massa da equação da continuidade. Uma forma alternativa da equação da continuidade é obtida aplicando a identidade vetorial,

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) \equiv \rho \nabla \cdot \vec{V} + \vec{V} \cdot \nabla \rho$$

e
$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$$

encontramos a equação (2.31) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.31)$$

A equação (2.31) é a forma da divergência da velocidade da equação da continuidade. Ela determina que a taxa de variação fracional de acréscimo na densidade de uma parcela de ar seguindo o movimento, é igual a menos a divergência da velocidade. Isto deve ser claramente distinguido de (2.30) que determina que a taxa local de variação da densidade é igual a menos a divergência de massa.

11. EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE EM COORDENADAS ISOBÁRICAS

Consideramos um elemento de massa fluída δM de área da seção transversal $\delta \times \delta y$ que está confinada entre superfícies de pressão $\rho - \delta \rho$, conforme a figura:

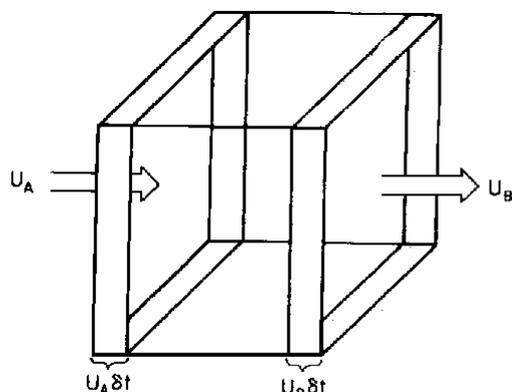


Figura 2.4 – variação no volume de controle lagrangeano devido ao movimento do fluido paralelo ao eixo x.

Aplicando a aproximação hidrostática $\partial p = -\rho g \partial z$ podemos escrever

$$\delta M = \rho \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta M = \frac{\delta x \delta y \delta p}{g}$$

uma vez que a massa do elemento de fluido deve ser conservada seguindo o movimento,

$$\frac{1}{\delta M} \frac{d}{dt} \delta M = \frac{g}{\delta x \delta y \delta p} \frac{d}{dt} \left(\frac{\delta x \delta y \delta p}{g} \right) = 0$$

diferenciando usando a regra da cadeia e mudando a ordem dos operadores temos:

$$\frac{1}{\delta x} \delta \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{1}{\delta y} \delta \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{1}{\delta p} \delta \left(\frac{dp}{dt} \right) = 0$$

ou

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta \omega}{\delta p} = 0 \quad (2.32)$$

onde usamos a definição $\omega \equiv \frac{dp}{dt}$.

tomando o limite quando $\delta x, \delta y, \delta p$ tendem para zero, obtemos então a equação da continuidade no sistema isobárico.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.33)$$

Esta forma da equação da continuidade, não contém referência à densidade nem tampouco envolve derivada temporal.

12. MOVIMENTO VERTICAL

Já visto anteriormente que para movimentos de escala sinótica a componente vertical da velocidade é da ordem de pouco centímetros por segundo. Entretanto as sondagens meteorológicas de rotina nos fornecem a velocidade dos ventos com uma precisão por volta de um metro por segundo. Isso significa que a velocidade vertical no caso geral não pode ser medida diretamente mas, inferida a partir dos campos medidos diretamente.

Entre as várias maneiras de se obter a velocidade vertical, encontra-se a integração da equação da continuidade na vertical. Este método pode ser mostrado considerando-se o caso de um fluido incompressível (o oceano, por exemplo). Para um fluido incompressível, $dp / dt = 0$ de modo que a equação (2.30) se transforma para

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

ou, em termos de componentes escalares:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

integrando na vertical do solo ($z = 0$), até uma altura genérica onde $z = h$

$$\int_0^h \frac{\partial w}{\partial t} dz = - \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz$$

$$\omega(h) - \omega(0) = -h \left(\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} \right) \quad (2.34)$$

onde a notação $\langle \rangle$ significa média na vertical. Isto quer dizer que para um fluido incompressível a diferença entre as velocidades médias na base e no topo de uma coluna é dada pelo produto da altura da coluna (profundidade) pela divergência média horizontal.

Se o fluido é compressível (caso da atmosfera) é mais simples aplicar a forma em coordenadas isobáricas da equação da continuidade. Integrando a equação (2.34) com respeito à pressão, temos:

$$\omega(p) - \omega(p_0) = - \int_{p_0}^p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dp \quad (2.35)$$

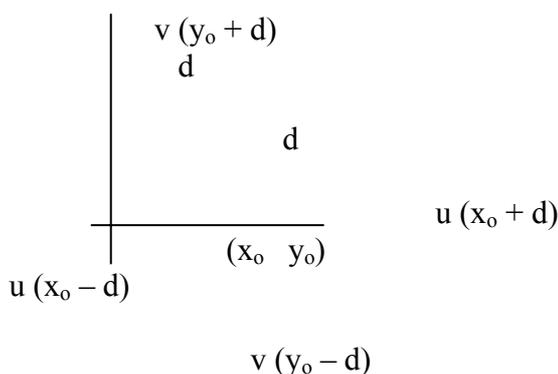
A equação (2.35) relaciona a velocidade vertical em um nível qualquer de pressão p a $\omega(p_0)$ e à divergência média na coluna entre as superfícies isobáricas p_0 e p .

13. MEDIDA DA DIVERGÊNCIA HORIZONTAL

A aplicação da equação (2.35) para estimar o campo da velocidade vertical, requer conhecimento da divergência horizontal. Para determinar a divergência horizontal as derivadas parciais $\partial u / \partial x$ e $\partial v / \partial y$ são geralmente estimadas a partir dos campos de u e v usando aproximação por diferenças finitas.

Por exemplo se queremos determinar a divergência horizontal no ponto x_0, y_0 , podemos escrever:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cong \frac{u(x_0 + d) - u(x_0 - d)}{2d} + \frac{v(y_0 + d) - v(y_0 - d)}{2d} \quad (2.36)$$



É sabido que para movimentos de escala sinótica nas médias latitudes a velocidade horizontal está aproximadamente em equilíbrio geostrófico. Exceto para pequenos efeitos devidos a variação do parâmetro de Coriolis o vento geostrófico é não divergente, ou seja, $\partial u_g / \partial x$ e $\partial v_g / \partial y$ são aproximadamente iguais em módulo mas têm sinais contrários, então, a divergência horizontal é devida principalmente a pequenos desvios do vento a partir do equilíbrio geostrófico. Um erro de 10 por cento na avaliação das componentes do vento na equação (9) pode facilmente causar à divergência estimada um erro de 100 por cento. Por esta razão, a equação da continuidade não é recomendada para ser usada como estimativa do campo do movimento vertical a partir dos ventos horizontais observados. Outros métodos serão desenvolvidos posteriormente, inclusive a equação omega, que dá uma melhor estimativa da velocidade vertical.

14. ANÁLISE DE ESCALA DA EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Seguindo a técnica de análise de escala já vista, pode-se escrever a equação da continuidade (2.31) como

$$\underbrace{\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho' \right)}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}}_{\mathbf{B}} + \underbrace{\nabla \cdot \vec{V}}_{\mathbf{C}} \cong 0 \quad (2.36)$$

Onde ρ' é o desvio local da densidade a partir de seu valor médio horizontal, $\rho_0(z)$. Para movimentos de escala sinótica, $\rho' / \rho_0 \sim 10^{-2}$ tal que usando as escalas características dadas anteriormente, encontramos que o termo **A** tem magnitude

$$\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho' \right) \sim \frac{\rho' U}{\rho_0 L} \sim 10^{-7} \text{ s}^{-1}$$

para movimentos nos quais a escala de profundidade é comparável a escala da densidade H , $d \ln \rho_0 / dz \sim D^{-1}$, tal que o termo **B** é escalado como

$$\frac{w}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \sim \frac{W}{D} \sim 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

expandindo o termo **C** em coordenadas cartesianas temos,

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Para movimentos de escala sinótica os termos $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ tendem a ser de magnitudes iguais mas de sinais opostos. Então, eles tendem a se equilibrar tal que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim 10^{-1} \frac{U}{L} \sim 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

somado a isto,

$$\frac{\partial w}{\partial z} \sim \frac{W}{D} \sim 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

então, os termos **B** e **C** são cada um, cerca de uma ordem de magnitude maior, que o termo **A**, e como uma primeira aproximação, os termos B e C se equilibram na equação da continuidade tal que nós temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} + w \frac{d \ln \rho_0}{dz} = 0$$

ou em forma vetorial

$$\nabla \cdot (\rho_0 \vec{V}) = 0 \quad (2.37)$$

Então, para movimentos de escala sinótica, a divergência se anula em um fluido incompressível, o qual não é o mesmo que está representado pela equação 2.37). essa aproximação mostra que para um escoamento puramente horizontal, a atmosfera se comporta como se fosse um fluido incompressível. Entretanto, quando existe um movimento vertical a incompressibilidade associada com a dependência de ρ_0 com a altura deve ser levado em conta.

15. A EQUAÇÃO DA ENERGIA TERMODINÂMICA

Voltamos agora para o terceiro princípio fundamental de conservação, a conservação da energia termodinâmica como é aplicada a um elemento de fluido em movimento. A primeira lei da termodinâmica é geralmente derivada por considerar um sistema termodinâmico em equilíbrio, isto é, um sistema que está inicialmente em repouso e após trocar calor com sua vizinhança e realizar trabalho sobre as vizinhanças está novamente em repouso. Para tal sistema, a primeira lei determina que *a taxa de variação na energia interna do sistema é igual a diferença entre o calor adicionado ao sistema e o trabalho realizado pelo sistema*. Um volume de controle lagrangeano consistindo de uma massa especificada do fluido pode ser pensada como um sistema termodinâmico. Entretanto, a menos que o fluido esteja em repouso, ele não estará em equilíbrio termodinâmico. Ainda assim, a primeira lei pode ser aplicada desde que a energia instantânea do volume de controle seja considerada consistir da soma da energia interna (devida a energia cinética das moléculas individuais) e a energia cinética devida ao movimento macroscópico do fluido. A forma modificada da

primeira lei da termodinâmica, ou equação da energia, que deve ser aplicada a um elemento do fluido então determina que a taxa de variação da energia termodinâmica total (interna mais cinética) é igual a taxa de aquecimento mais a taxa com que trabalho é realizado sobre o elemento pelas forças externas. Se nos designamos por e a energia interna por unidade de massa, então a energia termodinâmica total contida em um elemento lagrangeano de fluido de

densidade ρ e volume δV é $\rho(e + \frac{1}{2} \vec{V} \cdot \vec{V})\delta V$. As forças externas que atuam sobre o elemento do fluido, podem ser divididas em forças de superfície, tais como as forças da pressão e viscosidade e forças do corpo, tais como gravidade ou força de Coriolis. A taxa com que trabalho é realizado sobre o elemento fluido pela componente x da força de pressão está ilustrada na figura 3.6. Lembrando que a pressão é uma força por unidade de área, e que a taxa na qual uma força realiza trabalho é dada pelo produto escalar dos vetores força e velocidade, vemos que a taxa na qual o fluido vizinho realiza trabalho sobre o elemento devido à força da pressão sobre as duas superfícies limites no plano y, z é dada por

$$(pu)_A \delta y \delta z - (pu)_B \delta y \delta z$$

o sinal negativo antes do segundo termo é necessário porque o trabalho realizado sobre o elemento de fluido é positivo se u é negativo através da parede B. Agora, pela expansão em uma série de Taylor, podemos escrever

$$(pu)_B = (pu)_A + \left[\frac{\partial}{\partial x}(pu) \right]_A \delta x + ..$$

Então, a taxa líquida de trabalho da força da pressão devida à componente x do movimento é

$$[(pu)_A - (pu)_B] \delta y \delta z = - \left[\frac{\partial}{\partial x}(pu) \right]_A \delta V$$

na qual $\delta V = \delta x \delta y \delta z$.

De modo similar, pode-se mostrar que as taxas de trabalho realizado pelas forças da pressão devidas às componentes y e z do movimento são

$$- \left[\frac{\partial}{\partial y}(pu) \right]_A \delta V \quad \text{e} \quad - \left[\frac{\partial}{\partial z}(pu) \right]_A \delta V$$

respectivamente. Então a taxa total de trabalho pela força da pressão é simplesmente

$$-\nabla \cdot (p \vec{V}) \delta V$$

as únicas forças de corpo interesse meteorológico que atuam sobre um elemento de massa na atmosfera são a força de Coriolis e a força de gravidade. Entretanto, desde que a força de Coriolis, $-2\Omega \times \vec{V}$, é perpendicular a velocidade ao vetor velocidade, ela não pode realizar trabalho. Logo a taxa na qual as forças de corpo realizam trabalho sobre o elemento de massa

é exatamente $\rho g \cdot \vec{V} \delta V$.

Aplicando o princípio de conservação da energia ao nosso volume lagrangeano de controle (desprezando a viscosidade molecular) nos então obtemos

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \delta V \right] = - \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \delta V + \rho g \cdot \vec{V} \delta V + \rho \dot{q} \delta V \quad (2.38)$$

Aqui, \dot{q} é a taxa de aquecimento por unidade de massa devida à radiação, condução e liberação de calor latente. Com a ajuda da diferenciação pela regra da cadeia nos podemos re-escrever a equação (2.38) como

$$\begin{aligned} \rho \delta V \frac{d}{dt} \left(e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) + \left(e + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \frac{d(\rho \delta V)}{dt} = \\ = - \vec{V} \cdot \nabla p \delta V - p \nabla \cdot \vec{V} \delta V - \rho g w \delta V + \rho \dot{q} \delta V \end{aligned} \quad (2.39)$$

aqui usamos que $\vec{g} = -g \vec{k}$. Agora a partir de (2.32) nos vemos que o segundo termo da direita em (2.39) se anula tal que nos temos

$$\rho \frac{de}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = - \vec{V} \cdot \nabla p - p \nabla \cdot \vec{V} - \rho g w + \rho \dot{q} \quad (2.40)$$

esta equação pode ser mais simplificada, notando-se que se tomarmos o produto escalar de \vec{v} com a equação do momentum (2.8) podemos obter (desprezando o atrito)

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = - \vec{V} \cdot \nabla p - \rho g w \quad (2.41)$$

subtraindo (27) de (26) nos obtemos

$$\rho \frac{de}{dt} = - p \nabla \cdot \vec{V} + \rho \dot{q} \quad (2.42)$$

os termos que foram eliminados em (2.40) pela subtração de (2.41) representam um balanço da energia mecânica devida ao movimento do elemento do fluido; os termos remanescentes representam o balanço da energia termal. Usando a definição de geopotencial (1.15) nos temos

$$g w = g \frac{dz}{dt} = \frac{d\phi}{dt}$$

tal que (27) pode ser re-escrita como

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} + \phi \right) = - \vec{V} \cdot \nabla p \quad (2.43)$$

esta equação é chamada de *equação da energia mecânica*. Então, a equação (2.43) determina que seguindo o movimento, a taxa de variação da energia mecânica por unidade de volume é igual a taxa com que trabalho é realizado pela força do gradiente da pressão. A equação da energia termal (2.42) pode ser escrita de uma forma mais familiar notando-se de (2.31) que

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$$

e que para o ar seco a energia interna por unidade de massa é dada por $e=c_v T$, onde $c_v=717 \text{ J.kg}^{-1}.\text{k}^{-1}$ é o calor específico a volume constante. Nos então obtemos

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{q} \quad (2.44)$$

que é a forma usual da equação da energia termodinâmica. Então a primeira lei da termodinâmica verdadeiramente é aplicável ao movimento de um fluido. O segundo termo da esquerda representa a taxa de trabalho pelo sistema fluido (por unidade de massa), representa uma conversão entre as energias termal e mecânica. É este processo de conversão que habilita energia calorífica solar a forçar os movimentos da atmosfera.

16. TERMODINÂMICA DA ATMOSFERA SECA

Tomando a derivada total da equação de estado (1.13), obtemos

$$p \frac{d\alpha}{dt} + \alpha \frac{dp}{dt} = R \frac{dT}{dt}$$

substituindo para $p \frac{d\alpha}{dt}$ na equação (2.44) e usando que $c_p = c_v + R$, onde c_p que é igual a $1004 \text{ J.kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$, é o calor específico à pressão constante, podemos re-escrever a primeira lei da termodinâmica como,

$$c_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{q} \quad (2.45)$$

dividindo tudo por T e novamente usando a equação de estado, nós obtemos a forma da entropia da primeira lei da termodinâmica:

$$c_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln p}{dt} = \frac{\dot{q}}{T} \equiv \frac{ds}{dt} \quad (2.46)$$

A equação (2.46) dá a taxa de variação da entropia por unidade da massa seguindo o movimento para um processo termodinamicamente reversível. A entropia s assim definida pela equação (2.46) é um campo variável que depende unicamente do estado do fluido. Portanto, ds é um diferencial perfeito e ds/dt deve ser pensado como uma derivada total.

Contudo, “calor” não é um campo variável, tal que a taxa de aquecimento q não é uma derivada total.

17. TEMPERATURA POTENCIAL

Para um gás ideal realizar um processo adiabático, isto é, aquele no qual não há troca de calor com a sua vizinhança, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita na forma

$$c_p d \ln T - R d \ln p = 0$$

Integrando essa equação desde um estado onde a pressão é p e a temperatura é T até um estado onde a pressão é p_s e a temperatura θ , nós obtemos, após tomarmos o antilogaritmo

$$\theta = \left(\frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p} \quad (2.47)$$

Esta relação é referida como a *Equação de Poisson*, e a temperatura θ definida em (2.47) é chamada de *temperatura potencial*. θ é simplesmente a temperatura que uma parcela de ar seco a uma pressão p e temperatura T teria se fosse expandida ou comprimida adiabaticamente para uma pressão padrão p_s , normalmente tomada como sendo 100 kPa ou 1000 milibares. Então, uma parcela de ar seco movendo-se adiabaticamente conservará sua temperatura potencial. Tomando o logaritmo de (2.47) e diferenciando, nós encontramos que

$$c_p \frac{d \ln \theta}{dt} = c_p \frac{d \ln T}{dt} - R \frac{d \ln P}{dt} \quad (2.48)$$

comparando (2.46) e (2.48) nós obtemos

$$c_p \frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad (2.49)$$

então, para processos reversíveis adiabáticos secos, as variações na temperatura potencial fracional são verdadeiramente proporcionais às variações na entropia. Uma parcela que conserva entropia seguindo o movimento deve se mover ao longo de uma superfície isentrópica (θ constante).

18. A LAPSE RATE ADIABÁTICA

Uma relação entre a *lapse rate* da temperatura, isto é, o decréscimo da temperatura com a altura, e a taxa de variação da temperatura potencial com respeito à altura pode ser obtida tomando-se o logaritmo da equação (2.47) e diferenciando com respeito à altura (z). Usando a equação hidrostática e a lei dos gases ideais para simplificar o resultado, nós obtemos

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \quad (2.50)$$

para uma atmosfera na qual a temperatura potencial é constante com respeito à altura, a lapse rate é então

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{g}{c_p} \equiv \Gamma_d \quad (2.51)$$

Então, a *lapse rate adiabática seca* é aproximadamente constante através da baixa atmosfera.

19. A ESTABILIDADE ESTÁTICA

Se a temperatura potencial é uma função da altura, a lapse rate real $\Gamma \equiv -\frac{\partial T}{\partial z}$ diferirá da lapse rate adiabática e,

$$\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \Gamma_d - \Gamma \quad (2.52)$$

Se $\Gamma < \Gamma_d$ tal que θ aumenta com a altura, uma parcela de ar que realiza um deslocamento adiabático a partir de seu nível de equilíbrio será positivamente “buoyant” quando deslocado verticalmente para baixo e no caso contrário será negativamente e para cima tal que tenderá a retornar a seu nível de equilíbrio e a atmosfera é dita *estaticamente estável* ou ainda *estavelmente estratificada*. Oscilações adiabáticas de uma parcela de um fluido em torno de seu nível de equilíbrio em uma atmosfera estaticamente estável são referidas como *Oscilações de buoyancy*. A frequência característica de tais oscilações pode ser derivada por considerar uma parcela que é deslocada verticalmente de uma pequena distância δz sem perturbar o ambiente. Se o ambiente está em equilíbrio hidrostático nós temos

$\bar{\rho}g = -\frac{d\bar{p}}{dz}$, onde \bar{p} e $\bar{\rho}$ são a pressão e densidade do ambiente. A aceleração vertical da parcela será :

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(\delta z) - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.53)$$

onde p e ρ são a pressão e a densidade da parcela, respectivamente. No método da parcela, é suposto que a pressão da parcela, instantaneamente se ajusta à pressão do ambiente durante o deslocamento: $p = \bar{p}$. Esta condição deve ser verdadeira se a parcela deixar o ambiente não-perturbado. Então com a ajuda da relação hidrostática a pressão pode ser eliminada em (2.53) para dar

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = g \left(\frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} \right) = g \left(\frac{\theta - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \right) \quad (2.54)$$

onde a equação (2.47) e a lei dos gases ideais foram usadas para expressar as forças de buoyancy em termos da temperatura potencial. Se a parcela está inicialmente no nível $z = 0$ onde a temperatura potencial é θ_0 , então para um pequeno deslocamento δz nós podemos representar a temperatura potencial do ambiente como

$$\bar{\theta}(\delta z) \cong \theta_0 + \frac{d\bar{\theta}}{dz} \delta z$$

se o deslocamento da parcela é adiabático, a temperatura potencial da parcela é conservada: $\theta(\delta z) = \theta_0$. Então (2.54) se torna

$$\frac{d^2}{dt^2}(\delta z) = -N^2 \delta z \quad (2.55)$$

na qual

$$N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$$

é uma medida da estabilidade estática do ambiente. A equação (2.55) tem uma solução geral da forma

$$\delta z = A e^{iNt}$$

portanto, se $N > 0$ a parcela oscilará em torno do seu nível inicial com um período $\tau = 2\pi/N$.

A frequência correspondente N é a frequência de buoyancy (frequentemente chamada de frequência de Brunt – Väisälä). Para condições troposféricas médias, $N \approx 1.2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$, tal que o período de uma oscilação de buoyancy é da ordem de 8 minutos. No caso de $N = 0$, um exame da equação (2.55) indica que nenhuma força existirá e a parcela estará em equilíbrio neutro em seu novo nível. Por outro lado, se $N^2 < 0$, que é o caso onde a temperatura potencial decresce com a altura, o deslocamento aumentará exponencialmente no tempo. Nós então encontramos um critério de estabilidade gravitacional ou critério de estabilidade estática para o ar seco :

$$\frac{d\theta}{dz} \begin{cases} > 0 & \text{estavel} \\ = 0 & \text{neutro} \\ < 0 & \text{instavel} \end{cases}$$

Sobre a escala sinótica a atmosfera é sempre estavelmente estratificada porque quaisquer regiões instáveis que se desenvolvam são rapidamente estabilizadas por “overturning” convectivo.

20. ANÁLISE DE ESCALA DA EQUAÇÃO DA ENERGIA TERMODINÂMICA

Se a temperatura potencial é dividida em suas partes básicas e da perturbação, colocando-se $\theta = \theta_0(z) + \theta'(x, y, z, t)$, a primeira lei da termodinâmica (2.49) pode ser escrita aproximadamente como

$$\frac{1}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \theta' \right) + w \frac{d \ln \theta_0}{dz} = \frac{\dot{q}}{c_p T} \quad (2.56)$$

na qual nós usamos o fato que para

$$\left| \frac{\theta'}{\bar{\theta}} \right| \ll 1 \quad \ln \theta \approx \ln \theta_0 + \frac{\theta'}{\theta_0}$$

fora de regiões de precipitação ativa, o aquecimento diabático \dot{q} é devido principalmente ao saldo do aquecimento radiativo. Na troposfera o aquecimento radiativo é bem fraco tal que, tipicamente $\left| \frac{\dot{q}}{c_p} \right| \leq 1^\circ \text{ C} \cdot \text{d}^{-1}$ (exceto próximo ao topo das nuvens onde esfriamento substancialmente grande pode ocorrer). A amplitude típica das flutuações horizontais da temperatura potencial nos sistemas sinóticos de latitudes médias (acima da camada limite) é de $\theta' \sim 4^\circ \text{ C}$. Então,

$$\frac{T}{\theta_0} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \theta' \right) \sim \frac{\theta' U}{L} \cong \theta' \sim 4^\circ \text{ C} / \text{d}^{-1}$$

O esfriamento devido à advecção vertical devido à temperatura potencial do estado básico (geralmente chamada de esfriamento adiabático) tem uma magnitude típica de

$$w \left(\frac{T}{\theta_0} \frac{d\theta_0}{dz} \right) = w(\Gamma_d - \Gamma) \sim 4^\circ \text{ C} / \text{d}^{-1}$$

na qual $w \sim 1 \text{ cm s}^{-1}$ e $\Gamma_d - \Gamma$ a diferença entre as lapses rates adiabática seca e real, é da ordem de $4^\circ \text{ C} \cdot \text{ km}^{-1}$. então como uma primeira aproximação nós encontramos que, na ausência de fortes aquecimentos diabáticos, a taxa de variação da perturbação na temperatura potencial é igual ao aquecimento ou esfriamento adiabático devidos ao movimento vertical no estado básico estaticamente estável :

$$\frac{d\theta'}{dt} + w \frac{d\theta_o}{dz} \cong 0 \quad (2.57)$$

PARTE 3

APLICAÇÕES ELEMENTARES DAS EQUAÇÕES BÁSICAS

1. INTRODUÇÃO

2. MOVIMENTO HORIZONTAL SEM ATRITO

Vimos anteriormente que para sistemas sinóticos nas médias latitudes os campos da pressão e vento estavam aproximadamente em equilíbrio geostrófico de modo que, como uma primeira aproximação a equação do movimento horizontal se reduz a equação diagnóstica para o vento geostrófico:

$$\vec{V}_g = \vec{k} \times \frac{1}{\rho f} \nabla_H P \quad (3.1)$$

em que:

$$\vec{V}_g = \vec{i} u_g + \vec{j} v_g$$

é a velocidade geostrófica e o $\nabla_H P$ é o gradiente horizontal da pressão.

Podemos ver pelo esquema mostrado na Figura 3.1 que o vento geostrófico é o campo de velocidade para o qual a força de Coriolis equilibra a força do gradiente horizontal da pressão.

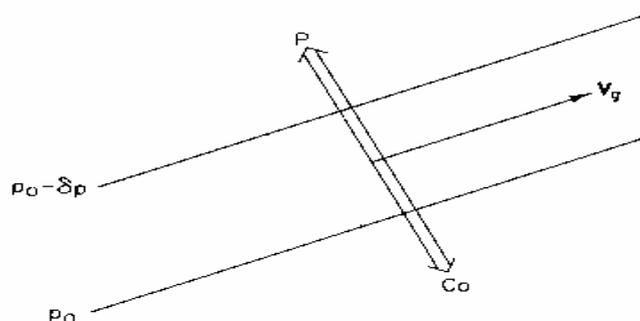


Figura 4 - Equilíbrio de forças no balanço geostrófico. A força do gradiente da pressão está representada por P e a força de Coriolis por C_0

3. VENTO GEOSTRÓFICO EM COORDENADAS ISOBÁRICAS

Na prática meteorológica diária, os dados são reportados sobre superfícies de pressão constante, muito embora isso não exclua a possibilidade da existência de cartas de altura constante. Por esse motivo, torna-se vantajoso calcular o vento geostrófico relativo à superfície de pressão constante.

Matematicamente, o único problema é fazer uma transformação de coordenadas verticais de z para P e então obter a expressão para o gradiente horizontal da pressão em termos do gradiente de altura a pressão constante.

Esta transformação pode ser realizada para a componente x da força do gradiente da pressão com a ajuda da figura abaixo.

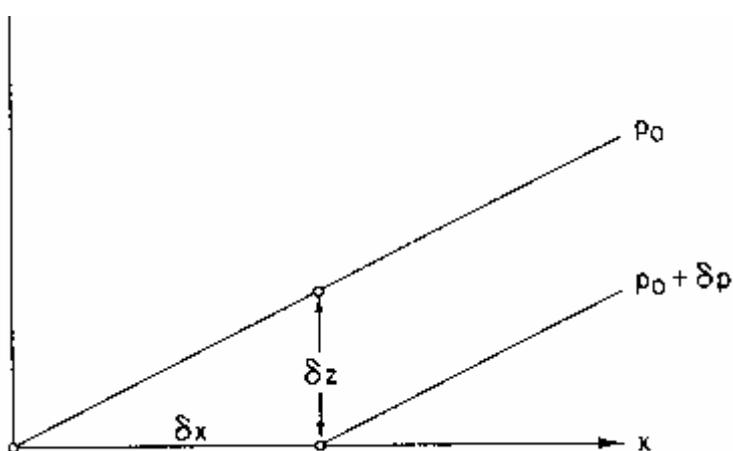


Figura 5 - declividade das superfícies de pressão no plano x, y

temos que:

$$\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta x} = \frac{(p_0 + \delta x) - p_0}{\delta z} \cdot \frac{\delta z}{\delta x}$$

levando ao limite quando $\delta x, \delta z \rightarrow 0$, obtemos:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_z = - \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right]_x \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_p$$

desde que pela aproximação hidrostática $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

temos:

$$\frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_z = g \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_p \quad (3.2)$$

substituindo o gradiente horizontal da pressão, obtemos:

$$fv_g = g \left[\frac{\partial z}{\partial x} \right]_p \quad (3.3)$$

analogamente:

$$-fu_g = g \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right]_p \quad (3.4)$$

daí a forma vetorial da relação geostrófica em coordenadas isobáricas:

$$\phi = \int_0^z g dz$$

onde ϕ é o geopotencial, definido como o trabalho necessário para elevar uma massa unitária da superfície da terra até a altura z .

As coordenadas isobáricas apresentam algumas vantagens sendo, uma delas, que a densidade não aparece explicitamente nas equações. Isso quer dizer que a um dado gradiente de geopotencial implica o mesmo vento geostrófico a qualquer altura enquanto que um dado gradiente horizontal da pressão implica diferentes valores do vento geostrófico dependendo da densidade. Conseqüência disso, se \mathbf{f} é mantido constante à divergência horizontal do vento geostrófico à pressão constante é zero,

$$\nabla_p \cdot \vec{V}_g = 0$$

para a vorticidade

$$\vec{k} \cdot (\nabla \times \vec{V}_g) = \frac{1}{f} \nabla^2 \phi \quad (3.5)$$

4. ESCOAMENTO CURVILÍNEO EM EQUILÍBRIO

A equação do movimento horizontal pode ser escrita :

$$\frac{d \vec{V}_h}{dt} - f \vec{V}_h \times \vec{k} = - \frac{1}{\rho} \nabla_h P \quad (3.6)$$

em que:

$$\vec{V}_h = \vec{i} u + \vec{j} v$$

é o vetor velocidade horizontal.

Vamos agora estudar os vários tipos de movimentos horizontais, sob condições de equilíbrio e estado permanente, fazendo aproximações sucessivas dessa equação.

5. COORDENADAS NATURAIS

Para ajudar o entendimento dos vários tipos de equilíbrio de força possíveis para campos de escoamento em estado permanente na atmosfera, costuma-se expandir a equação (3.6) em componentes referidas a um sistema de coordenadas chamado natural. As direções das coordenadas (s , n , z) no sistema natural são definidas pelos vetores unitários e respectivamente; \vec{t} é orientado paralelo à direção do escoamento em cada ponto, e um vetor normal, positivo quando está à esquerda da direção do escoamento e é dirigido verticalmente para cima.

Neste sistema de coordenadas a velocidade horizontal pode ser escrita:

$$V_h = V\vec{t} \quad \text{com} \quad V = \frac{ds}{dt}$$

A aceleração seguindo o movimento é obtida diferenciando-se V_h com relação ao tempo:

$$\frac{dV_h}{dt} = \vec{t} \frac{dV}{dt} + V \frac{d\vec{t}}{dt} \quad (3.7)$$

Vamos considerar a quantidade como uma partícula que se move ao longo de sua trajetória no espaço a partir de um ponto P de uma distância infinitesimal ds no tempo dt de acordo com a figura abaixo.

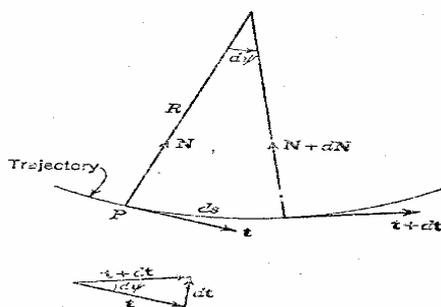


Figura 6 - Variação dos vetores unitários tangente e normal.

Da figura podemos ver que o vetor $d\vec{t}$ tem magnitude $d\psi$ e direção normal a \vec{t} no plano das tangentes consecutivas. A direção descrita, é dada pelo vetor unitário normal principal.

Segue daí que:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{t}}{ds} &= \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{t}}{ds} = V \frac{d\psi}{ds} \vec{N} \\ &= V k \vec{N} = V \vec{k}\end{aligned}\quad (3.8)$$

na qual:

$$\frac{d\psi}{ds} = k$$

É definido como a curvatura no espaço da trajetória da partícula e \vec{k} é o vetor curvatura. O recíproco de $R = \frac{1}{K}$ é o raio de curvatura.

Substituindo estes resultados na equação (31) temos as várias formas equivalentes da aceleração:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{t} + V^2 k \vec{N} \quad (3.9)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{t} + V^2 \vec{k}$$

ou ainda

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV}{dt} \vec{t} + \frac{V^2}{R} \vec{N} \quad (3.10)$$

Isso significa que a aceleração seguindo o movimento é a soma da taxa de variação da velocidade da parcela de ar e sua aceleração centrípeta devido à curvatura da trajetória.

Desde que a força de Coriolis sempre atua normal à direção do movimento, nós podemos escrever:

$$f \vec{V}_h \times \vec{k} = -fV \vec{N} \quad (3.11)$$

A equação para o movimento horizontal pode então ser expandida nas equações componentes para o movimento:

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (3.12)$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$$

Estas equações expressam o equilíbrio de forças paralelas e normais à direção do escoamento respectivamente. Para os movimentos paralelos às isóbaras, $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ e a velocidade é constante seguindo o movimento.

6. MOVIMENTO INERCIAL

Se existe um campo de escoamento, no qual o campo de pressão na horizontal é uniforme tal que o gradiente horizontal da pressão é nulo, temos:

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0 \quad (3.13)$$

Esta equação pode ser resolvida para R , dando

$$R = -\frac{V}{f}$$

Desde que a velocidade é constante, o raio de curvatura também é constante se desprezarmos a variação latitudinal de f . A parcela de ar seguirá uma trajetória circular no sentido anticiclônico, com período

$$P = -\frac{2\pi r}{V} = \frac{\pi}{\Omega \sin\phi}$$

Desde que as forças de Coriolis e Centrífuga são devidas à inércia do fluido, esse tipo de movimento é referido como uma oscilação Inercial e o círculo de raio R é chamado círculo de inércia.

7. ESCOAMENTO CICLOSTRÓFICO

Se a escala horizontal de um distúrbio é bastante pequena, a força de Coriolis pode ser desprezada em comparação a força do gradiente de pressão e a força centrífuga. O equilíbrio das forças normais à direção do escoamento é então:

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.14)$$

Resolvendo esta equação para V :

$$V = \left(\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right)^{1/2} \quad (3.15)$$

Que é a velocidade do vento ciclostrófico, como esta indicado na figura abaixo, o escoamento ciclostrófico pode ser ciclônico ou anticiclônico.

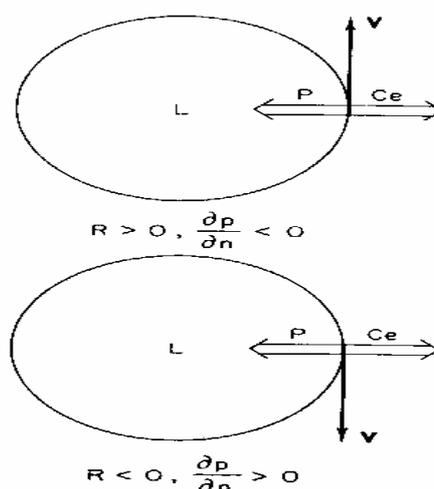


Figura 7 - O equilíbrio de forças em um escoamento ciclostrófico. P representa a força do gradiente de pressão enquanto C_e designa força centrífuga.

Nos dois casos a força do gradiente de pressão está dirigida na direção do centro de curvatura e a força centrífuga, para fora do centro de curvatura.

A aproximação do equilíbrio ciclostrófico é válida quando a razão da força centrífuga para a de Coriolis é grande. Esta razão V/fR é equivalente ao número de Rossby, R_o .

8. ESCOAMENTO GRADIENTE

Quando os termos da equação do movimento são todos retidos, resulta um escoamento chamado vento gradiente. Este escoamento é o resultado do equilíbrio de três forças, a saber, força de Coriolis, força Centrífuga e força gradiente de pressão normal ao escoamento.

$$\frac{V^2}{R} + fV = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (3.16)$$

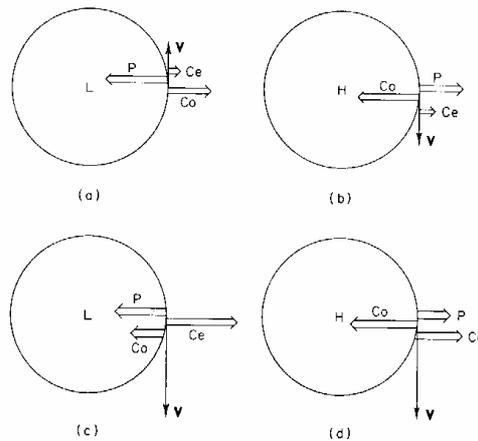


Figura 8 – Equilíbrio de forças em quatro tipos de escoamento gradiente no Hemisfério Norte, **(a)** baixa regular, **(b)** alta regular, **(c)** baixa anômala, **(d)** alta anômala.

1º Caso

$$R > 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} > 0$$

as duas raízes de V são:

$$V_1 = \frac{f_1 R}{2} + \sqrt{Q} \quad ; \quad V_2 = \frac{f_1 R}{2} - \sqrt{Q}$$

em que:
$$Q = \frac{f_1^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

Desde que:

$$\frac{f_1^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} < \frac{f_1 R}{2}$$

V_1 e V_2 são positivas e válidas. $V_1 + V_2 = f_1 R$ e $V_1 \geq V_2$. Mas quando $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ cresce V_1 decresce,

enquanto que V_2 cresce. Quando $\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0$, $V_1 = f_1 R$ e $V_2 = 0$.

Então, V_2 se comporta de uma maneira fisicamente esperada, enquanto que V_1 , tem um comportamento anômalo.

$R > 0$, implica uma circulação positiva, portanto um escoamento anticiclônico. $\frac{\partial p}{\partial \eta} > 0$

implica em um crescimento da pressão à medida que nos aproximamos do centro de alta pressão. Então, neste caso, temos dois tipos de escoamento anticiclônico.

2° Caso

$$R > 0, \frac{\partial p}{\partial \eta} < 0$$

Neste caso,

$$\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} < 0 \text{ e } V_1 = \frac{f_1 R}{2} + \left[\frac{f_1^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^{1/2}$$

mas, de acordo com a equação acima:

$$\frac{f_1 R}{2} + \left[\frac{f_1^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^{1/2} > \frac{f_1 R}{2} \text{ e } V_2 = \frac{f_1 R}{2} - \left[\frac{f_1^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^{1/2}; \alpha > 0$$

portanto $V_2 < 0$ o que não é permitido $\frac{\partial p}{\partial \eta} < 0$ significa que a pressão decresce para o centro, isto é, uma área de baixa pressão.

$R > 0$ significa circulação positiva, ou seja, escoamento anticiclônico em torno de uma área de baixa pressão, isto é, temos mais um caso de circulação anômala.

Embora as circulações desse tipo sejam permitidas pela solução geral, pode-se demonstrar que são instáveis no sentido de que elas desaparecem com qualquer distúrbio pequeno.

3° Caso

$$R < 0 \text{ e } \frac{\partial p}{\partial \eta} > 0$$

Seja $R = -R'$ portanto, $R' > 0$

$$V_1 = \frac{-f_1 R'}{2} + \left[\frac{f_1^2 R'^2}{4} + \frac{R'}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^{1/2}, V_2 = \frac{-f_1 R'}{2} - \left[\frac{f_1^2 R'^2}{4} + \frac{R'}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^{1/2}$$

$$\left[\frac{f_1^2 R'^2}{4} + \frac{R'}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^{1/2} \geq \frac{f_1 R'}{2}$$

resolvendo para V, obtemos:

$$V^2 + fRV = -\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta}}$$

Nem todas as soluções matematicamente possíveis dessa solução correspondem a soluções físicas possíveis desde que V deve ser real e positivo.

Podemos analisar cada caso separadamente, a partir de uma tabela onde as várias raízes da equação são analisadas de acordo com o sinal de R e $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ para isolar as soluções com significado físico.

Tabela – Raízes da equação para o vento gradiente, caso do Hemisfério Norte.

	$R > 0$	$R < 0$
$\frac{\partial p}{\partial \eta} > 0$	Não permitida	Raiz positiva permitida baixa anômala
$\frac{\partial p}{\partial \eta} < 0$	Raiz positiva permitido escoamento regular	Raiz positiva: alta anômala Raiz negativa: alta regular

Um diagrama mostrando o equilíbrio de forças para os quatro casos acima pode ser visto na figura 1.5.

Façamos a análise para o Hemisfério Sul :

Neste Hemisfério $f = 2\Omega \sin \phi$ é negativo porque ϕ é negativo. Podemos então usar $f = -f_1$, portanto f_1 é positivo para o H. Sul

$$V = \frac{f_1 R}{2} \pm \left[\frac{f_1^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right]^{1/2}$$

V deve ser positivo, logo os valores negativos devem ser excluídos embora sejam raízes matemáticas da equação. Para que V seja real, devemos ter:

$$\frac{f_1^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} \geq 0$$

CIRCULAÇÃO E VORTICIDADE

1. INTRODUÇÃO

A vorticidade, que é uma medida microscópica da rotação de um fluido, é um campo vetorial definido como o rotacional da velocidade. Pela definição de vorticidade:

$$\nabla \times \vec{V} = \xi \vec{i} + \eta \vec{j} + \zeta \vec{k}$$

onde

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\vec{V} = \vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w$$

as componentes da vorticidade são obtidas efetuando-se o produto vetorial:

$$\nabla \times \vec{V} = \left(\vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial v}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \times (\vec{i} u + \vec{j} v + \vec{k} w) =$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j}$$

ou

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Fundamentalmente, a vorticidade é uma extensão do conceito de velocidade angular de rotação de um corpo sólido e é essencialmente a velocidade angular de uma partícula de um fluido em torno de um eixo local centrado na própria partícula. Os movimentos

atmosféricos de interesse meteorológico são essencialmente horizontais (com algumas exceções como nos movimentos convectivos em um C_b típico, etc.) por isso, a componente vertical da vorticidade ζ , tem maior significância em descrever escoamentos de grande escala. Daqui por diante quando nos referimos à vorticidade estaremos falando da componente vertical seja relativa ou absoluta.

Para escoamento horizontal relativo à terra esférica, é conveniente usar a expressão para a vorticidade ζ em coordenadas curvilíneas esféricas, $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\tan \varphi}{a}$ onde u e v são as componentes do vento nas direções Leste-Oeste e Norte-Sul respectivamente e a é a distância vertical do ponto considerado ao centro da terra. Este último termo representa uma “correção” quando usamos coordenadas esféricas. Contudo o termo $u \frac{\tan \varphi}{a}$ é normalmente uma ordem de grandeza menor que $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$. Portanto, este termo é normalmente omitido e ζ é então:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V}$$

2. VORTICIDADE EM COORDENADAS NATURAIS

A interpretação da vorticidade é mais prontamente entendida quando a expressamos em coordenadas naturais. Vamos considerar a definição anterior,

$$\zeta = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V}$$

onde

$$\vec{V} = \vec{t} V$$

é o vento em grande escala. Pode-se mostrar facilmente que $\vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V} = \vec{k} \cdot \nabla_H \times \vec{V}$ daí então:

$$\zeta = \vec{k} \cdot \nabla_H \times \vec{V}$$

em coordenadas naturais

$$\nabla_H = \vec{i} \frac{\partial}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n}$$

portanto

$$\zeta = \vec{k} \cdot \left[\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial s} + \vec{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \times \vec{t} V \right]$$

$$\zeta = \vec{k} \cdot \left[\left(\vec{t} \times \vec{t} \right) \frac{\partial V}{\partial s} + V \left(\vec{t} \times \frac{\partial \vec{t}}{\partial s} \right) + \left(\vec{n} \times \vec{t} \right) \frac{\partial V}{\partial n} + V \left(\vec{n} \times \frac{\partial \vec{t}}{\partial n} \right) \right]$$

o terceiro termo fica:

$$-k \frac{\partial v}{\partial n}$$

no segundo termo, $\frac{\partial \vec{t}}{\partial s}$ é a curvatura no espaço, da linha de corrente que pode ser escrita como:

$$\vec{k} = k_s \vec{n} + k_z \vec{k}$$

o produto vetorial com \vec{t} , dá

$$\vec{t} \times \vec{k} = k_s \vec{k} - k_z \vec{n}$$

onde consideraremos somente a contribuição vertical $k_s \vec{k}$.

A curvatura $\frac{\partial \vec{t}}{\partial n}$, tem componentes em \vec{n} e \vec{k} , quando cruzados com \vec{n} , não dá qualquer contribuição para a componente vertical da vorticidade.

Então, para o escoamento horizontal esférico, obtemos:

$$\zeta = V k_s - \frac{\partial v}{\partial n}$$

mas, desde que $k_s = \frac{1}{R_s}$, R_s é o raio da curvatura

$$\zeta = \frac{v}{R_s} - \frac{\partial v}{\partial n}$$

esta última equação nos dá uma interpretação simples da vorticidade relativa $\zeta \cdot \frac{V}{R_s}$

representa a velocidade angular de rotação sólida de uma partícula em torno de um eixo vertical através do centro de curvatura instantâneo. Este termo é positivo para rotação no sentido contrário aos ponteiros do relógio, vista da vertical local.

O termo de cisalhamento lateral $-\frac{\partial v}{\partial n}$ representa a velocidade angular efetiva da partícula fluída produzida por distorção devida a diferenças de velocidade horizontal nos seus contornos. Mais uma vez o sinal desta contribuição é determinado pelo sentido de rotação em torno da vertical local. O termo descritivo “vorticidade ciclônica”, implica que a rotação resultante é similar aquela em torno de um ciclone.

3. VORTICIDADES ABSOLUTA E RELATIVA

As vorticidades relativa e absoluta são obtidas usando as velocidades relativa e absoluta nas definições anteriores. Além disso, pela definição de velocidade absoluta, que é,

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \Omega \times \vec{r}$$

onde \vec{r} é o vetor posição da partícula (distância do centro da terra à partícula) temos pela definição de vorticidade:

$$\nabla \times \vec{V}_a = \nabla \times \vec{V} + \nabla \times (\Omega \times \vec{r})$$

desde que

$$\nabla \times (\Omega \times \vec{r}) = 2\Omega$$

portanto, o vetor vorticidade absoluta é igual ao vetor vorticidade relativa mais o vetor vorticidade da terra (duas vezes a velocidade angular). Tomando o produto escalar de ambos os lados pelo unitário \vec{k} , ficamos:

$$\vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V}_a = \vec{k} \cdot \nabla \times \vec{V} + \vec{k} \cdot 2\Omega$$

$$\zeta_a = \zeta + f$$

Note-se que desta última equação, a vorticidade absoluta em qualquer ponto da terra é igual a vorticidade relativa mais duas vezes a taxa de rotação em torno da vertical local do ponto em questão. O conceito de circulação está estreitamente ligado ao conceito de vorticidade e ela tem um grande número de aplicações importantes. Por definição, circulação é a integral de linha da componente tangencial da velocidade ao longo de um contorno fechado. Se o caminho de integração pode ser definido pelo vetor \vec{l} , podemos escrever:

$$C = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint |\vec{V}| \cos \alpha \cdot dl$$

por convenção, a circulação é tomada positiva para um circuito no sentido contrário aos ponteiros do relógio em torno de \vec{l} . A circulação é uma medida macroscópica da rotação de uma área finita de um fluido. Isto pode ser visto a partir do seguinte exemplo: Ex.: Suponha que um disco circular de fluido, de raio r está em rotação sólida a uma velocidade angular Ω em torno do eixo dos z 's. Neste caso, $\vec{V} = \Omega \times \vec{r}$ onde \vec{r} é a distância ao eixo de rotação. Então a circulação em torno do contorno do disco é dada por:

$$C = \oint_1 \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \Omega r^2 d\lambda$$

$$C = 2\Omega \pi r^2 \quad \text{ou} \quad \frac{C}{\pi r^2} = 2\Omega$$

então, no caso de rotação de um corpo sólido, a circulação por unidade de área é igual a duas vezes a velocidade angular de rotação.

4. TEOREMA DA CIRCULAÇÃO

O teorema da circulação pode ser obtido, tomando-se a integral de linha da Segunda lei de Newton para uma cadeia fechada de partículas do fluido. No sistema de coordenadas absoluto, fica:

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = -\alpha \nabla p - \nabla \phi \quad (\text{desprezando atrito})$$

$$\oint \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{l} = -\oint \alpha \nabla p \cdot d\vec{l} - \oint \nabla \phi \cdot d\vec{l} \quad (4.1)$$

o lado esquerdo pode ser desmembrado da forma a seguir:

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} (\vec{V}_a \cdot d\vec{l}) - \vec{V}_a \cdot \frac{d}{dt} (d\vec{l})$$

lembrando que \vec{l} é um vetor posição tal que $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{V}_a$

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} (\vec{V}_a \cdot d\vec{l}) - \vec{V}_a \cdot d\vec{V}_a$$

substituindo este resultado em (1) e lembrando que a integral de linha de uma diferencial perfeita é zero, tal que

$$\oint \nabla \phi \cdot d\vec{l} = \oint d\phi = 0$$

e que,

$$\oint \vec{V}_a \cdot d\vec{V}_a = \frac{1}{2} \oint (\vec{V}_a \cdot \vec{V}_a) = 0$$

obtemos:

$$\oint \frac{d_a \vec{V}_a \cdot d\vec{l}}{dt} = - \oint \alpha \nabla p \cdot d\vec{l}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{V}_a \cdot d\vec{l} = - \oint \alpha \nabla p \cdot d\vec{l}$$

portanto,

$$\frac{d}{dt} C_a = - \oint \alpha dp \quad \text{Também} \quad \frac{d}{dt} C_a = - \oint \frac{dp}{\rho}$$

o termo do lado direito é dito termo solenoidal. Para um fluido barotrópico a densidade é função só da pressão e o termo solenóide é zero de modo que a circulação absoluta é conservada seguindo o movimento. Este resultado é chamado teorema da circulação de Kelvin. Isso é análogo à conservação da quantidade de movimento angular da mecânica dos fluidos. Para análise meteorológica, é mais conveniente trabalhar com a circulação relativa C ao invés da circulação absoluta. Isto porque uma parte da circulação absoluta C_e é devida à rotação da terra em torno do seu eixo. Para calcular C_e , aplicamos o teorema de Stokes ao vetor \vec{V}_e , onde $\vec{V}_e = \Omega \times \vec{r}$ é a velocidade de rotação da terra. Então,

$$C_e = \oint \vec{V}_e \cdot d\vec{l} = \iint (\nabla \times \vec{V}_e) \cdot \vec{n} dA$$

mas, desde que

$$(\nabla \times \vec{V}_e) \cdot \vec{n} = 2\Omega \sin\phi = f \quad \text{parâmetro de coriolis}$$

então, a circulação devida à rotação da terra é

$$C_e = 2\Omega \sin \phi A$$

em que ϕ é o valor médio da latitude sobre o elemento de área A . Podemos escrever então:

$$C = C_a - C_e = C_a - 2\Omega F \quad (4.2)$$

na qual, $F = A \cdot \sin \bar{\phi}$ é a projeção do elemento de área A sobre o plano equatorial (ver figura abaixo).

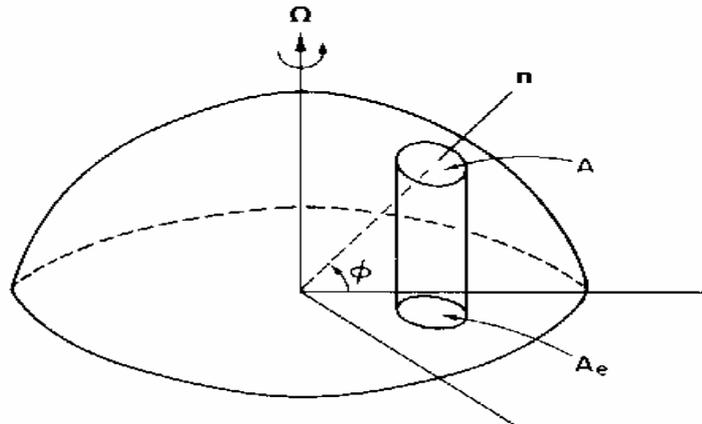


Fig. 4.1 – Área A_e subtendida sobre o plano equatorial pela área horizontal A centrada na latitude Φ .

diferenciando (4.2) seguindo o movimento, no teorema de Kelvin, desde que $\frac{d}{dt} C_a = \oint \frac{dp}{\rho}$ temos:

$$\frac{d}{dt} C = - \oint \frac{dp}{\rho} - 2\Omega \frac{dC_a}{dt}$$

para um fluido barotrópico (o primeiro termo da direita não aparece) essa equação poder ser integrada de um estado inicial até um estado final, dando:

$$C_f - C_i = - 2\Omega (A_f \text{ sen } \phi_f - A_i \text{ sen } \phi_i)$$

essa equação determina que para um fluido barotrópico a circulação relativa para um circuito fechado muda se ambas área horizontal compreendida pelo circuito e latitude média mudam.

EXEMPLO:

Suponha que o ar dentro de uma região circular de raio $r = 100$ km centrado no equador está inicialmente parado com respeito a terra. Se essa massa de ar move-se para o Pólo Norte ao longo de uma superfície isobárica, a circulação em torno da circunferência seria:

$$C = - 2\Omega \pi r^2 (\text{sen } \pi/2 - \text{sen } 0)$$

a velocidade tangencial média no raio de 100 km seria

$$\bar{V} = \frac{c}{2\pi r} = -\Omega r$$

$$\bar{V} \sim -7 \text{ ms}^{-1}$$

o sinal negativo indica que o ar adquiriu circulação relativa anticiclônica. Veremos a seguir o papel desempenhado pelo termo de solenóide na circulação. A geração de circulação por solenóides pressão densidade pode ser efetivamente ilustrado, considerando o desenvolvimento de uma circulação tipo brisa do mar. O problema é mostrado pela figura a seguir:

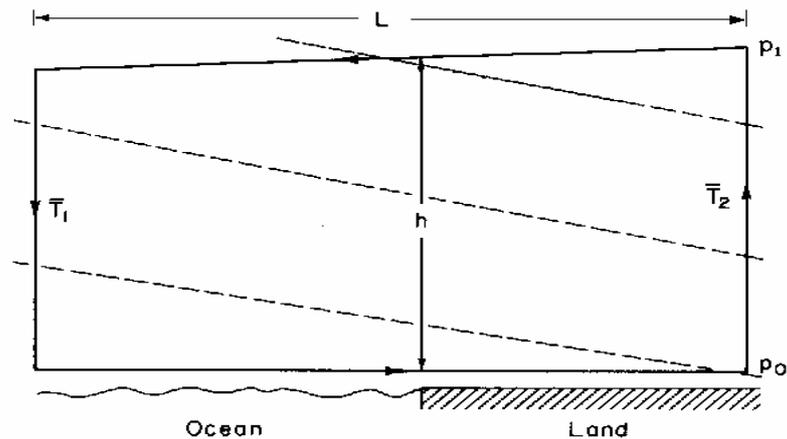


Fig. 4.2 - aplicação do Teorema da Circulação ao problema da brisa do mar. A linha sólida fechada é o circuito em torno do qual a circulação é avaliada. As linhas tracejadas representam as isostéricas

A temperatura média do mar sobre o oceano é *mais fria* do que sobre a terra. Então, se a pressão é uniforme sobre o nível do chão, as superfícies isobáricas acima do solo terão uma inclinação para *baixo* na direção do oceano enquanto que as *superfícies isostéricas* (isolinhas de volume específico) se inclinarão na direção contrária. Para calcular a aceleração como um resultado da intersecção das superfícies pressão-densidade, nós aplicamos o teorema da circulação a um circuito fechado sobre um plano vertical, perpendicular à linha da costa

Substituindo a lei dos gases ideais na expressão:

$$\frac{d}{dt} C_a = - \oint \frac{dp}{\rho}$$

desde que

$$\frac{1}{\rho} = \frac{RT}{p}$$

$$\frac{d}{dt} C_a = - \left[\int RT d \ln p \right]$$

avaliando esta integral para o circuito, observamos que há contribuição somente nos segmentos verticais desde que os segmentos horizontais são tomados à pressão constante (as declividades das isóbaras podem ser desprezadas, comparadas às isósteras) a taxa de acréscimo resultante na circulação é:

$$\frac{d}{dt} C_a = R \cdot \ln \left(\frac{P_o}{P_1} \right) (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) > 0$$

fazendo \bar{v} ser a velocidade tangencial média ao longo do circuito, encontramos que:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{R \ln (p_o/p_1) (\bar{T}_2 - \bar{T}_1)}{2 (h + L)}$$

Aplicação:

Suponha que $P_o = 1000$ mb; $P_1 = 900$ mb; $\bar{T}_2 - \bar{T}_1 = 10^\circ\text{C}$; $L = 20$ km e $h = 1$ km, encontramos p aceleração:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} \cong 0,685 \text{ cm.s}^{-2}$$

tal que na ausência de forças de atrito o vento alcançaria uma velocidade de 20 m.s^{-1} em cerca de 1 hora.

Na realidade, porém, o atrito (que é proporcional ao quadrado da velocidade do vento rapidamente retardaria a aceleração e eventualmente um equilíbrio seria alcançado entre a geração de energia cinética pelos solenóides pressão-densidade e dissipação por atrito.

5. VORTICIDADE POTENCIAL

Desde que temperatura é conservada seguindo o movimento em um escoamento adiabático, uma parcela do fluido que se move adiabaticamente permanecerá sobre a mesma superfície de temperatura potencial.

Pode-se mostrar, usando a definição de temperatura potencial que, para θ constante,

$$\rho \propto p^{(1-c_v/c_p)} \quad (4.3)$$

conseqüentemente, a densidade é uma função da pressão somente sobre uma superfície adiabática e o termo solenóide do teorema da circulação se anula

$$\oint \frac{dp}{\rho} \propto \oint dp^{(1-c_v/c_p)} = 0 \quad (4.4)$$

então, para movimento adiabático, o teorema da circulação sobre uma superfície $\theta = \text{constante}$, se reduz para a mesma forma que a de um fluido barotrópico,

$$\frac{d}{dt} (C + 2\Omega \text{sen}\phi) = 0 \quad (4.5)$$

onde C é avaliado para um circuito fechado em torno uma área A sobre uma superfície isentrópica.

Se supomos que a superfície isentrópica é aproximadamente horizontal, e lembramos que a componente vertical da vorticidade relativa é dada por:

$$\zeta = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{C}{A}$$

podemos escrever a expressão para a integral de (4.5) e para uma parcela infinitesimal de ar, como:

$$A(\zeta + f) = \text{constante} \quad (4.6)$$

onde $f = 2\Omega \sin \phi$ é o parâmetro de Coriolis.

Vamos supor agora que a parcela de ar está confinada entre superfícies de temperatura potencial θ_0 e $\theta_0 + \delta\theta$ que estão separadas pela distância δp conforme figura abaixo:

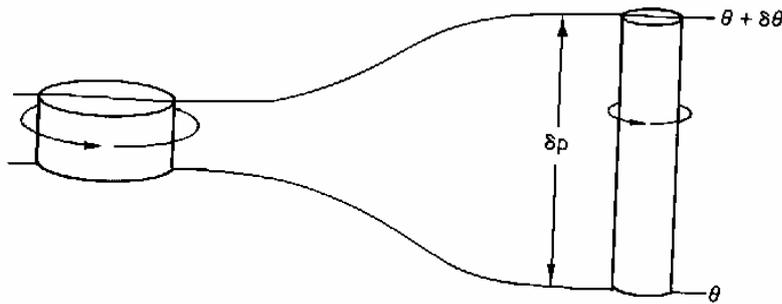


Fig. 4.3 – Um coluna cilíndrica de ar em movimento adiabático, conservando vorticidade potencial

a massa da parcela $M = A \frac{\delta p}{g}$ deve ser conservada seguindo o movimento. Portanto

$$A = \frac{\text{Const}}{\delta p} = \text{Const.} \frac{\delta\theta}{\delta p}$$

desde que $\delta\theta$ é uma constante. Substituindo IV para eliminar A e tomando o limite quando $\delta p \rightarrow 0$, obtemos:

$$(\zeta + f) \frac{\partial\theta}{\partial p} = \text{Constante} \quad (4.7)$$

Essa expressão (4.7) expressa a conservação da vorticidade potencial em um movimento adiabático sem atrito. O termo potencial é usado, como veremos depois, em conexão com várias outras expressões matemáticas ligeiramente diferentes. Essencialmente, a vorticidade potencial é

sempre de algum modo uma medida da razão da vorticidade absoluta para a espessura efetiva é exatamente a distância entre duas superfícies de temperatura potencial medida em unidades de pressão. Em um fluido incompressível homogêneo o teorema da conservação da vorticidade potencial toma uma forma mais simples. Neste caso, desde que a densidade é uma constante nós temos:

$$A = \frac{\text{Const.}}{\delta z}$$

a conservação da vorticidade potencial é uma poderosa restrição sobre os movimentos de grande escala na atmosfera. Isto pode ser entendido considerando-se o escoamento de ar sobre uma barreira montanhosa.

I – para escoamento de oeste para leste

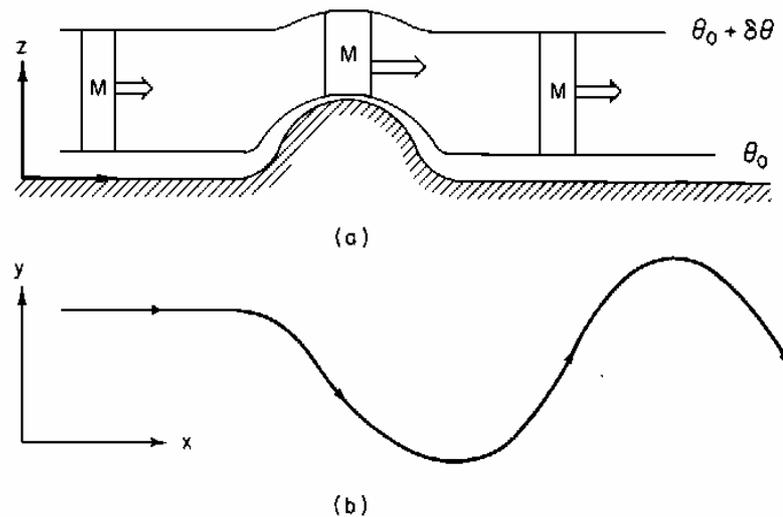


Figura 4.4 – Escoamento de oeste sobre uma barreira topográfica:

- a) a profundidade de uma coluna como função de \$x\$;
- b) a trajetória de uma parcela no plano \$x - y\$.

II – para escoamento de leste para oeste

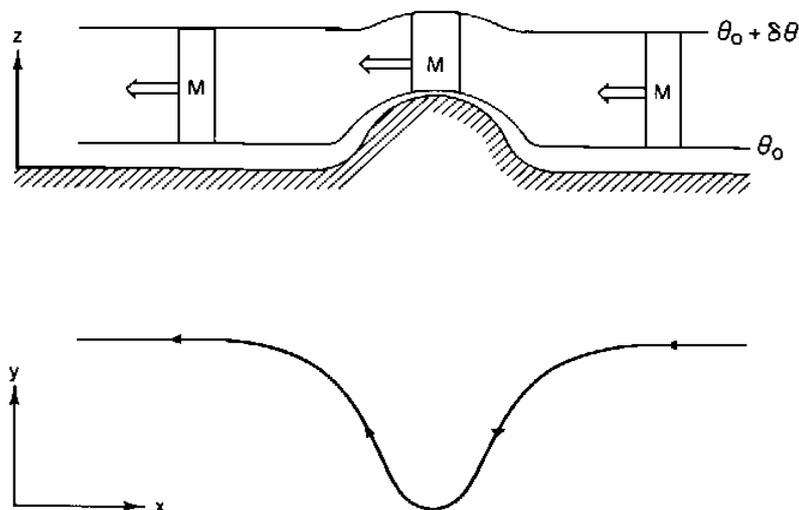


Figura 4.5 - escoamento de leste sobre uma barreira topográfica.

6. A EQUAÇÃO DA VORTICIDADE

Até aqui, discutimos a evolução no tempo da componente vertical da vorticidade para o caso especial do escoamento adiabático sem fricção. Vejamos agora como se deriva a equação da vorticidade usando a equação do movimento e sem limitar a validade para o movimento diabático.

Para movimentos de escala sinótica, a equação da vorticidade pode ser obtida usando as equações para a quantidade de movimento horizontal:

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$

diferenciando a componente x com respeito a y e a componente y com respeito a x, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (fv) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (fu) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (4.10)$$

lembrando que $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$ e que $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - \\ & - f \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \\ & + f \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.12)$$

subtraindo (4.12) de (4.11) obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ & + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + w \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ & + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{df}{dy} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

então, re-arrumando os termos, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \frac{df}{dy} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

podemos usar o fato de que, como o parâmetro de Coriolis depende somente de y , $\frac{df}{dt} \equiv v \frac{\partial f}{\partial y}$ para re-agrupar os termos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\zeta + f) = & - (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

A equação (4.14) determina que a taxa de variação da vorticidade absoluta seguindo o movimento é dada pela soma de três termos chamados: termo da divergência, termo de twisting ou tilting e termo solenoidal, respectivamente.

7. ANÁLISE DOS TERMOS

O primeiro termo da direita representa a geração de vorticidade pela divergência horizontal do vento. Se há divergência horizontal positiva, a área circundada por uma cadeia de partículas do fluido aumentará com o tempo; se a circulação for conservada, a vorticidade absoluta média, do fluido interior deve decrescer. Este mecanismo é muito importante nos distúrbios de escala sinótica.

O segundo termo da direita representa vorticidade vertical que é gerada por “tilting” ou “twisting” das componentes horizontalmente orientadas da vorticidade por um campo de velocidade vertical não uniforme, ver figura a seguir.

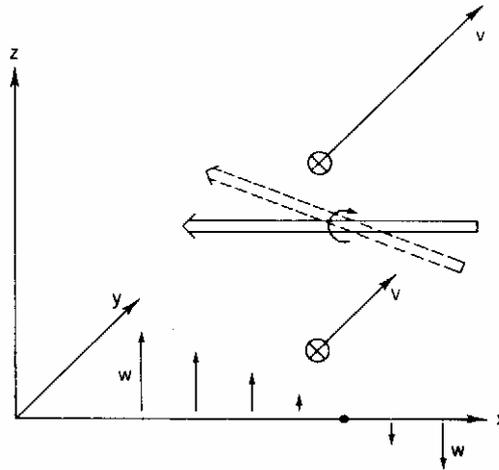


Fig. 8 - geração de vorticidade pelo tilting de um tubo de vórtice horizontal (dupla seta)

O terceiro termo é exatamente o equivalente microscópico do termo de solenóide no teorema da circulação. Podemos ver isto, aplicando o teorema de Stokes ao termo solenoidal (equação de conservação da circulação absoluta) para dar:

$$\oint -\alpha dp = - \oint \alpha \nabla p \cdot d\vec{l} = - \iint_A \nabla \times (\nabla p) \cdot \vec{k} dA \quad (4.15)$$

onde A é uma área horizontal circundada pelo circuito \vec{l} . Aplicando a identidade vetorial $\nabla \times (\alpha \nabla p) \equiv \nabla \alpha \times \nabla p$, vemos que:

$$\oint -\alpha dp = - \iint_A (\nabla \alpha \times \nabla p) \cdot \vec{k} dA \quad (4.16)$$

mas o termo solenoidal pode ser escrito:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) = - \vec{k} \cdot (\nabla \alpha \times \nabla p) \quad (4.17)$$

comparando os lados direitos desta expressão e da expressão anterior, vemos que o termo solenoidal na equação da vorticidade é exatamente o limite do termo solenoidal no teorema da circulação dividido pela área quando essa área tende para zero.

8. ANÁLISE DE ESCALA DA EQUAÇÃO DA VORTICIDADE

A análise de escala tem por finalidade, a simplificação das equações que regem o comportamento da atmosfera por eliminar os termos de menor importância das equações.

Para escalar a equação da vorticidade escolhemos escalas características para o campo das variáveis, baseados em valores típicos observados para movimentos de escala sinótica como segue:

U	$\sim 10^3 \text{ cm s}^{-1}$	escala característica para velocidade horizontal
W	$\sim 1 \text{ cm s}^{-1}$	escala característica para velocidade vertical
L	$\sim 10^8 \text{ cm}$	escala característica para comprimento
H	$\sim 10^6 \text{ cm}$	escala característica para profundidade
δp	$\sim 10^4 \text{ dyn. cm}^{-2}$	escala característica para flutuações horizontais da pressão
$\delta p / \rho$	~ 0.02	escala característica para flutuação na densidade fracional
L/U	$\sim 10^5 \text{ s}$	escala característica para de tempo
f_o	$\sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	escala característica para o parâmetro de Coriolis
$\frac{df}{dy} \equiv \beta$	$\sim 10^{13} \text{ cm s}^{-1}$	escala característica para parâmetro beta

Escolhemos uma escala de tempo advectiva porque a vorticidade tem trajetória como a pressão, tende a se mover a uma velocidade comparável a velocidade horizontal do vento.

Usando estas escalas para avaliar as ordens de grandeza dos termos, notamos que:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \lesssim \frac{U}{L} \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

comparada com o parâmetro de Coriolis, nós obtemos:

$$\frac{\zeta}{f_o} \lesssim 10^{-1}$$

tal que para sistema sinóticos nas médias latitudes, a vorticidade relativa é pequena comparada a vorticidade da terra. Portanto no termo da divergência, ζ é comparado a f :

$$(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sim f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

As ordens de grandeza nos vários termos na equação da vorticidade são as seguintes:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}, u \frac{\partial \zeta}{\partial x}, v \frac{\partial \zeta}{\partial t} \sim \frac{U^2}{L^2} \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

$$w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \sim \frac{UW}{LH} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}$$

$$v \frac{df}{dy} \sim U\beta \sim 10^{-10} \text{ s}^{-2}$$

$$f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \leq \frac{f_0 U}{2} \sim 10^{-9} \text{ s}^{-2}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \leq \frac{WU}{HL} \sim 10^{-11} \text{ s}^{-2}$$

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \leq \frac{\delta \rho \delta \rho}{\rho^2 L^2} \sim 2 \times 10^{-11} \text{ s}^{-2}$$

O símbolo $<$ é usado para os últimos três termos porque em cada caso, é possível que as duas partes da expressão possa ser parcialmente cancelada tal que a ordem de grandeza real seja menor que a indicada. De fato, comparando as magnitudes dos vários termos, nós vemos que isto deve ser verdadeiro para o termo da divergência, porque se $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ não fossem

aproximadamente iguais e opostos, o termo da divergência seria uma ordem de magnitude maior do que qualquer outro termo e a equação poderia não ser satisfeita. Conseqüentemente, análise de escala da equação da vorticidade indica que movimentos de escala sinótica devem ser quase não-divergentes. Ou seja, que o termo da divergência é pequeno bastante para ser balanceado pelos termos de advecção de vorticidade, como vemos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \leq 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

tal que a divergência horizontal deve ser pequena comparada a vorticidade nos sistemas de escala sinótica.

Mantendo agora somente os termos da ordem de 10^{-10} s^{-2} na equação da vorticidade, nós obtemos como uma primeira aproximação para movimentos de escala sinótica

$$\frac{d_h}{dt}(\zeta + f) = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (4.18)$$

onde

$$\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Essa equação determina que, como uma primeira aproximação, a taxa de variação de vorticidade absoluta seguindo o movimento é inteiramente devida ao efeito da divergência. Esta

aproximação falha, entretanto, nas vizinhanças de frentes. A escala horizontal de variação nas zonas frontais é somente ~ 100 km e, para esta escala a advecção vertical, tilting e solenoidal são termos que se tornam grandes tanto quanto a divergência.

9. SIMPLIFICAÇÕES DA EQUAÇÃO DA VORTICIDADE

Se tivéssemos expressado nossas equações para as componentes u e v em coordenadas (x, y, p, t) , obteríamos a equação da vorticidade nesse sistema:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -V_H \cdot \nabla (\zeta + f) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - (\zeta + f) \nabla \cdot V + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (4.19)$$

onde

$$\zeta = K \cdot (\nabla \times V)$$

Além disso todas derivadas horizontais foram avaliadas à pressão constante. Os termos em XIX lidos na ordem da direita para esquerda são:

- I – taxa local de variação da vorticidade relativa
- II – advecção horizontal de vorticidade absoluta
- III – advecção vertical de vorticidade relativa
- IV – termo da divergência
- V – termo de twisting ou tilting

A partir da análise da escala já mostrada, podemos simplificar a equação da vorticidade para movimentos de escala sinótica e nas médias latitudes:

- I – desprezando os termos de advecção vertical e de twisting
- II – desprezando ζ comparado a f no termo da divergência
- III – aproximando a velocidade horizontal pelo vento geostrófico no termo de advecção
- IV – substituindo a vorticidade relativa pelo seu valor geostrófico.

Para mais simplificação podemos expandir o parâmetro de Coriolis em uma série de Taylor em torno da latitude: ϕ_0 :

$$f = f_0 + \left(\frac{df}{dy} \right)_{\phi_0} \cdot y + \text{termos de 2ª. e 3ª. ordens} \quad (4.20)$$

como $\left(\frac{df}{dy} \right)_{\phi_0} = \beta$ parâmetro de Rossby e $y = 0$ em $\phi = \phi_0$ $f = f_0 + \beta y$

Fazendo $L =$ escala latitudinal dos movimentos, a razão dos dois primeiros termos da expressão é:

$$\frac{L}{f_0} \sim \frac{\cos \phi_0 L}{\sin \phi_0} \quad (4.21)$$

Portanto, desde que a escala latitudinal é pequena comparada ao raio da terra $\left(\frac{L}{a} \ll 1\right)$ nós podemos usar o parâmetro de Coriolis como tendo um valor constante f_0 exceto onde ele aparece diferenciado no termo de advecção onde $\left(\cos \phi \frac{df}{dy} \equiv \beta\right)$ é suposto constante. Esta aproximação é geralmente referida como “aproximação do plano beta”.

Agora aplicando todas essas aproximações, nós obtemos a equação da vorticidade quase-geostrófica:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) - f_0 \nabla \cdot \vec{V} \quad (4.22)$$

onde

$$\zeta_g = \nabla^2 \phi / f_0 \quad \text{e} \quad \vec{V}_g = \vec{k} \times \nabla \phi / f_0$$

e são avaliados considerando o parâmetro de Coriolis constante f_0 .