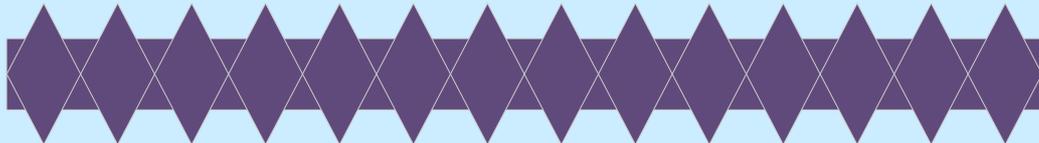




UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE TECNOLOGIA E RECURSOS NATURAIS
UNIDADE ACADÊMICA DE CIÊNCIAS ATMOSFÉRICAS



Cadernos de Dinâmica

Vol. II

*Prof. Manoel F. Gomes Filho
Campina Grande – Paraíba*

Julho de 2008

Apresentação

Este trabalho representa uma primeira tentativa de se produzir um texto em português que venha a servir de guia para as aulas de Meteorologia Dinâmica II tal como está previsto no elenco de disciplinas do Curso de Graduação em Meteorologia da recém criada UFCG. Ele foi produzido a partir das notas de aula preparadas pelo autor e está inteiramente baseado no livro “ An introduction to Dynamic Meteorology “ do autor James R. Holton. Evidentemente, todas as contribuições para correção do texto são bem vindas e com isso espera-se que no futuro, após o retorno dos interessados e usuários, sejam estudantes ou professores que se disponham a usa-lo, talvez transformar o rascunho em um texto final.

COLABORAÇÕES DECISIVAS

As seguintes colaborações foram decisivas para a realização deste projeto e sem elas provavelmente não se teria chegado ao resultado ora apresentado.

Fábio Guilherme (*)

Maria Luciene Dias (*)

Maytê Duarte Leal Coutinho (**)

Sheilla Christini Santana (*)

(*) Mestrando (a) em Meteorologia do Centro de Tecnologia e Recursos Naturais da UFCG.

(**) Estudante do curso de Meteorologia da UFCG

CONTEÚDO

Parte 1 - A Camada Limite Planetária

Introdução	03
A Teoria do Comprimento de Mistura	03
Equações para a Camada Limite Planetária	08
A Camada de Ekman	11
Circulação Secundária e “ Spin Down “	17

Parte 2 - Dinâmica dos Movimentos de Escala Sinótica nas Latitudes Médias

Introdução	22
Estrutura Observada	23
Equações Básicas	29
Equações para Diagnóstico	31
Equação da Tendência do Geopotencial	37
Equação para o Movimento Vertical (Equação Omega)	42

Parte 3 - Oscilações Atmosféricas

Introdução	46
Oscilador Harmônico Simples	64
Oscilador Harmônico Amortecido	50
Oscilações forçadas e Ressonância	52
Oscilações Atmosféricas – o método das perturbações	54
Aplicações do Método das Perturbações	60

Parte 4 - Desenvolvimento e Movimento de Sistemas Sinóticos de Latitudes Médias

Introdução	76
Instabilidade Hidrodinâmica	76
Instabilidade Baroclínica	78
Energética das Ondas Baroclínicas - Energia Potencial Disponível	84
Equações da Energia para o modelo quase geostrófico de dois níveis	87

A CAMADA LIMITE PLANETÁRIA

1. INTRODUÇÃO

Em todas as discussões precedentes que o livro texto apresenta sobre os campos do escoamento de grande escala, foram desprezados os efeitos da difusão de *momentum* e *calor*. Isto foi justificado, com base em análise de escala das equações do movimento. Entretanto, próximo à superfície, fortes cisalhamentos do vento e o aquecimento do solo, continuamente favorecem o desenvolvimento de vórtices turbulentos (“eddies”). Estes “eddies” são agentes misturadores muito eficientes que servem para transferir calor e

umidade na vertical, para cima da superfície da terra e momentum na horizontal, ao longo da superfície, a uma taxa de muitas ordens de grandeza mais rápidas que a taxa de mistura para a difusão molecular. Este transporte turbulento tem uma influência apreciável sobre os movimentos dentro de uma camada, que é chamada de *Camada Limite Planetária*, cuja profundidade pode variar entre 30 m sob condições de grande estabilidade, até mais de 3000 m em condições altamente convectivas. Para condições intermediárias, nas latitudes médias, a camada limite planetária estende-se através do primeiro quilômetro da atmosfera e contém cerca de 10% de sua massa.

Em uma atmosfera estaticamente estável, a mistura turbulenta na camada limite é gerada principalmente pela instabilidade dinâmica devida aos cisalhamentos verticais muito fortes do vento próximo ao solo. Então, a mistura turbulenta é forçada mecanicamente e não termicamente.

Usualmente, divide-se a camada limite planetária em duas subcamadas; a camada superficial e a camada de Ekman. A primeira, que está confinada nos primeiros metros da atmosfera, é uma camada na qual o perfil de velocidades, está ajustado de tal modo que o “stress” devido ao atrito horizontal, é aproximadamente independente da altura. A camada de Ekman, que se estende desde o topo da camada superficial até a altura de 1 km, é uma camada na qual existe um equilíbrio entre três forças: gradiente da pressão, Coriolis e viscosidade. Devido ao fato de que, a camada limite planetária ser uma camada turbulenta, uma teoria matemática rigorosa para a estrutura do campo de velocidades nesta camada ainda não é possível.

2. A TEORIA DO COMPRIMENTO DE MISTURA (The mixing length theory)

O conceito de um coeficiente de viscosidade turbulenta foi apresentado pelo fluido dinamicista norueguês L. Prandtl, que deixou uma base teórica para estimar a magnitude da viscosidade turbulenta. A idéia básica de Prandtl era de que o transporte de *momentum* dos movimentos turbulentos de pequena escala, podem ser parametrizados em termos do escoamento médio de grande escala. Para se entender a base desta parametrização, deve-se

primeiro considerar o desvio nas equações do escoamento médio para um fluido turbulento. Em um fluido desse tipo, a velocidade medida em um ponto, geralmente flutua rapidamente no tempo, à medida que “eddies” de várias escalas passam pelo ponto. Para que nossas medidas da velocidade sejam verdadeiramente representativas do escoamento de grande escala, torna-se necessário então, que se tome média do escoamento sobre um intervalo de tempo longo o bastante para “filtrar” as flutuações turbulentas mas, ainda pequeno o suficiente para preservar características do campo do escoamento médio.

Para fazer isto, usamos parêntesis angulosos (angle brackets) para definir a velocidade média $\langle \mathbf{u} \rangle$ como média no tempo em um dado ponto. A velocidade instantânea será então, $\mathbf{u} = \langle \mathbf{u} \rangle + \mathbf{u}'$ onde \mathbf{u}' é o desvio a partir da média no tempo. O \mathbf{u}' está, então associado, com os “eddies” turbulentos.

Agora, aplica-se isso às equações do movimento horizontal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.2)$$

usando também a equação da continuidade,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (1.3)$$

o sistema de equações de (1) a (3) pode ser escrito de uma forma mais conveniente aos nossos propósitos, multiplicando-se a equação (1) por ρ e a equação (3) por \mathbf{u} e em seguida, somando-se as equações resultantes, obtendo-se :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho uw) - f \rho v = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.4)$$

Esta é a equação do *momentum* na direção \underline{x} , na forma de fluxo. De uma forma análoga, pode-se obter a equação para a direção \underline{y} :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho vw) + f \rho u = -\frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.5)$$

agora, substitui-se as velocidades instantâneas \underline{u} , \underline{v} e \underline{w} , pela soma de seus valores médios mais os desvios,

$$\underline{u} = \langle \underline{u} \rangle + \underline{u}' ; \underline{v} = \langle \underline{v} \rangle + \underline{v}' \text{ e } \underline{w} = \langle \underline{w} \rangle + \underline{w}' \text{ com } \underline{p} = \langle p \rangle . \quad (1.6)$$

Desprezamos pequenas flutuações na densidade associadas com a turbulência, das equações resultantes podem ser tomadas as médias no tempo para se conseguir uma partição mais simples do escoamento entre os campos do escoamento médio e turbulento. Então por exemplo, o termo $\rho \underline{u} \underline{w}$ se torna,

$$\langle \rho \underline{u} \underline{w} \rangle = \rho \langle (\langle \underline{u} \rangle + \underline{u}')(\langle \underline{w} \rangle + \underline{w}') \rangle = \rho \langle \underline{u} \rangle \langle \underline{w} \rangle + \rho \langle \underline{u}' \underline{w}' \rangle$$

onde termos tais como $\langle \underline{u} \rangle \underline{w}' \rangle$ e $\langle \underline{u}' \underline{w} \rangle$ se anulam porque $\langle \underline{u} \rangle$ e $\langle \underline{w} \rangle$ são constantes sobre o intervalo de mediação tal que, por exemplo, $\langle \langle \underline{u} \rangle \underline{w}' \rangle = \langle \underline{u} \rangle \langle \underline{w}' \rangle = \mathbf{0}$ desde que $\langle \underline{w}' \rangle = \mathbf{0}$.

Efetuoando-se este processo para todos os termos das equações (4) e (5), obtém-se com a ajuda da equação da continuidade,

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - f \langle v \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \langle u' u' \rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \langle u' v' \rangle) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \langle u' w' \rangle) \right] \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \langle v \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z} + f \langle u \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho \langle u' v' \rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \langle v' v' \rangle) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \langle v' w' \rangle) \right] \quad (1.8)$$

Os termos entre os colchetes no lado direito das equações (7) e (8), os quais dependem das flutuações turbulentas, são chamados de *termos do stress turbulento* (do inglês eddy stress terms). Na teoria do comprimento de mistura, estes termos são parametrizados em função do campo médio das variáveis, supondo-se que o stress turbulento (eddy stress) é proporcional ao gradiente do vento médio. Desde que estamos primariamente interessados na camada limite planetária, onde os gradientes verticais são muito maiores do que os gradientes horizontais, a discussão será limitada aos termos do stress turbulento na vertical. De acordo com a hipótese do comprimento de mistura, uma parcela de fluido que é deslocada verticalmente, deslocará a velocidade média horizontal de seu nível original de uma distância característica l' análoga ao *livre caminho médio* na teoria da viscosidade molecular. Este deslocamento criará uma flutuação turbulenta cuja magnitude dependerá de l' e do cisalhamento da velocidade média.

Então, por exemplo,

$$u' = -l' \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z}$$

onde deve ser entendido que $l' > 0$ para deslocamentos da parcela *para cima* e $l' < 0$ para deslocamentos *para baixo*. O eddy stress vertical $-\rho \langle u'w' \rangle$, pode então ser escrito como,

$$-\rho \langle u'w' \rangle = \rho \langle w'l' \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \quad (1.9)$$

Para se estimar w' em termos dos campos médios supõe-se que a estabilidade vertical da atmosfera é aproximadamente neutra, tal que os efeitos de buoyancy são pequenos. A escala horizontal dos *eddies* deveria ser então comparável à escala vertical, tal que $|w'| \sim |V'|$ e poderia ser posto que,

$$w' = l' \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial z} \right|$$

na qual V' e $\langle V \rangle$ representam as partes média e turbulenta do campo de velocidade horizontal, respectivamente. Aqui o valor absoluto do gradiente da velocidade média é

necessário porque, se $l' > 0$ devemos ter $w' > 0$, que é deslocamento da parcela para cima pelas flutuações do stress. Então, o stress turbulento pode ser escrito como,

$$-\rho \langle u'w' \rangle = \rho \langle l'^2 \rangle \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial z} \right| \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} = A_z \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \quad (1.10)$$

onde

$$A_z \equiv \rho \langle l'^2 \rangle \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial z} \right|$$

é chamado o *coeficiente de troca turbulento*.

Da mesma maneira, pode-se mostrar que o stress turbulento vertical devido ao movimento na direção y pode ser escrito,

$$-\rho \langle v'w' \rangle = A_z \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial z}$$

Na camada limite planetária é usualmente suposto que o A_z depende somente da distância a partir da superfície.

3. EQUAÇÕES PARA A CAMADA LIMITE PLANETÁRIA

Se os termos do eddy stress horizontal nas equações (7) e (8) são desprezados e o stress vertical é reescrito, colocando-se,

$$\tau_x = -\rho \langle u'w' \rangle, \quad \tau_y = -\rho \langle v'w' \rangle$$

as equações para o escoamento médio se tornam,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \quad (1.12)$$

onde os parêntesis angulosos foram omitidos desde que todas as varáveis dependentes são médias no tempo. Para movimentos de escala sinótica nas médias latitudes, mostra-se que os termos de aceleração \mathbf{du}/dt e \mathbf{dv}/dt nas equações (11) e (12) são pequenos quando comparados com os termos das forças de Coriolis e do gradiente da pressão. Além do mais, fora da camada limite, a primeira aproximação é de que o escoamento está em equilíbrio geostrófico. Na camada limite, os termos de aceleração ainda são pequenos comparados aos termos de Coriolis e gradiente da pressão. Então, como uma primeira aproximação para a camada limite planetária, as equações expressam um equilíbrio a três forças entre a força de Coriolis, a força do gradiente da pressão e a força de viscosidade:

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right) \quad (1.13)$$

$$+fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tau_y}{\rho} \right) \quad (1.14)$$

aqui foi suposto que as variações na densidade ρ são pequenas dentro da camada limite.

4. A CAMADA SUPERFICIAL

Para simplificar, pode-se supor que o escoamento próximo ao chão está dirigido em uma direção paralela ao eixo dos x. O stress da superfície dividido pela densidade pode então ser escrito em termos da velocidade de fricção u_* a qual é definida pela identidade $u_*^2 \equiv \left(\frac{\tau_x}{\rho} \right)_s$ na qual o subscrito s indica que este termo é um valor à superfície. Medidas indicam que o stress superficial na atmosfera, tem um valor típico de $\tau_x \cong 0.1 \text{ N.m}^{-2}$. Então,

$$\left(\frac{\tau_x}{\rho} \right) \sim 0.1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \quad \text{e} \quad u_*^2 \sim 0.3 \text{ m s}^{-1}.$$

De acordo com a análise de escala, os termos da força de Coriolis e da força do gradiente da pressão tem magnitudes em torno de 10^{-3} m.s^{-2} nas latitudes médias. Então se estes dois termos precisam equilibrar o termo do stress turbulento, é necessário que,

$$\frac{\Delta(\tau_x / \rho)}{\Delta z} \leq 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$$

Logo, para $\Delta z = 10 \text{ m}$, $\Delta(\tau_x / \rho) \leq 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. Então, a variação no stress turbulento dentro da camada que contém os primeiros 10m da atmosfera é menor que 10% do valor do stress à superfície. Como uma primeira aproximação, é então permissível supor, que nos primeiros metros da baixa atmosfera, o stress permanece constante e com seu valor da superfície:

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \frac{A_z}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} = u_*^2 \quad (1.15)$$

onde o stress superficial foi parametrizado em termos do *coeficiente de troca turbulenta* A_z definido pela equação (10). Na obtenção de A_z foi suposto que as escalas horizontal e vertical dos eddies eram aproximadamente iguais. Próximo à superfície, a escala vertical dos eddies é limitada pela distância a esta. Então, uma

escolha lógica para o comprimento de mistura l é que $l = K_m z$ onde k é uma constante. Portanto, temos que:

$$K \cong l^2 \left| \frac{\partial \langle V \rangle}{\partial z} \right|.$$

substituindo esta expressão acima para A_z na equação (15) e extraindo a raiz quadrada do resultado, encontra-se,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$$

Integrando com respeito a z , leva ao *perfil logarítmico do vento*

$$u = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (1.16)$$

na qual z_0 é o **comprimento da rugosidade**, é uma constante de integração escolhida tal que $u = 0$ em $z = z_0$. A constante k na equação (16) é uma constante universal chamada **constante de von Karmam** que tem um valor determinado experimentalmente de $k \cong 0.4$. O comprimento da rugosidade z_0 varia largamente dependendo das características físicas da superfície. Tipicamente para campos gramados, seus valores estão em torno de 1 a 4 centímetros.

5. A CAMADA DE EKMAN

Acima da camada superficial, a estrutura da camada limite é determinada pelas equações (13) e (14). Observações indicam que nesta região, a escala característica dos eddies turbulentos não é simplesmente proporcional à distância a partir do solo, mas tende a ser aproximadamente constante com a altura. Então, de modo a simplificar a discussão, introduzimos um *coeficiente de viscosidade turbulento* $K \equiv A_z / \rho$ que pode ser suposto constante com a altura. Neste caso, as equações para a camada turbulenta de Ekman se

tornam exatamente iguais às equações para o escoamento laminar porém com o coeficiente de viscosidade turbulenta K substituindo o coeficiente de viscosidade cinemática molecular.

Introduzindo a parametrização da viscosidade turbulenta (15) em (13) e uma expressão análoga em (14) obtém-se como equações aproximadas para a camada limite planetária,

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0 \quad (1.17)$$

$$K \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0 \quad (1.18)$$

nas quais foram usadas as definições,

$$u_g \equiv -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g \equiv \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

As equações para a camada de Ekman (17) e (18) podem ser resolvidas para determinar o desvio do campo dos ventos a partir do equilíbrio geostrófico na camada limite. Para manter a análise a mais simples possível, vamos supor que as equações (17) e (18), com o $K = \text{constante}$, se aplicam a toda a camada limite, sem considerar a camada superficial. As condições de contorno sobre \mathbf{u} e \mathbf{v} precisam que ambas as componentes da velocidade se anulem sobre o solo e tendam para seus valores geostróficos, bem acima do chão:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{v} = 0 \quad \text{em } z \rightarrow 0 \\ \mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_g, \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_g \quad \text{à medida que } z \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Para resolver as equações (17) e (18), é conveniente primeiro multiplicar a segunda equação por $i = \sqrt{-1}$ e adicionar o resultado à primeira, para obter uma equação de segunda ordem na velocidade complexa $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$:

$$K \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) - f(u + iv) = -if(u_g + iv_g) \quad (1.20)$$

Por simplicidade, supomos que o vento geostrófico é independente da altura e que o escoamento está orientado tal que o vento geostrófico é inteiramente zonal ($\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$). Então, a solução geral da equação (20) pode ser escrita como:

$$u + iv = A \exp\left[\left(\frac{if}{K}\right)^{1/2} z\right] + B \exp\left[-\left(\frac{if}{K}\right)^{1/2} z\right] + u_g$$

Pode ser mostrado que $\sqrt{i} = (1+i)/\sqrt{2}$. Usando esta relação e aplicando as condições de contorno (19), encontramos que para o Hemisfério Norte, onde $f > 0$, $\mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{B} = -\mathbf{u}_g$. Então,

$$u + iv = -u_g e^{-\gamma(1+i)z} + u_g$$

na qual, $\gamma = (f/2K)^{1/2}$.

Aplicando a *fórmula de Euler*, $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ e separando a parte real da parte imaginária, obtemos, para o Hemisfério Norte,

$$\begin{aligned} u &= u_g (1 - e^{-\gamma z} \cos \gamma z) \\ v &= u_g e^{-\gamma z} \sin \gamma z \end{aligned} \tag{1.21}$$

Esta solução é a famosa espiral de Ekman denominada assim em homenagem ao oceanógrafo sueco V. W. Ekman, quem primeiro obteve uma solução análoga para as correntes superficiais forçadas pelo vento nos oceanos. A estrutura desta solução pode ser melhor ilustrada pelo hodógrafo mostrado na figura 1.1, abaixo.

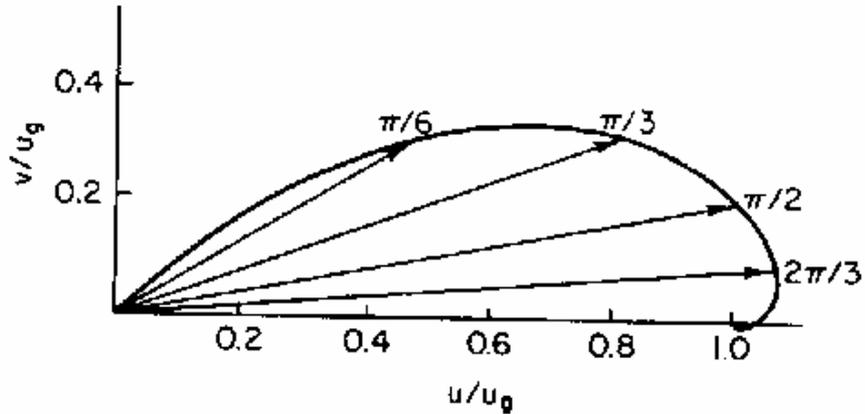


Figura 1.1 – Hodógrafo da solução espiral de Ekman. Os pontos marcados sobre a curva, são valores de γz , que é uma medida adimensional da altura.

Nesta figura, as componentes da velocidade do vento são plotadas como uma função da altura. Então, os pontos sobre a curva correspondem a u e v na equação (21) para valores de γz aumentando à medida que uma partícula se afasta da origem ao longo da espiral. Pode ser visto a partir da figura 1.1 que quando $z = \frac{\pi}{\gamma}$, o vento é paralelo ao vento geostrófico embora ligeiramente maior em magnitude. Convenciona-se designar este nível como o topo da camada limite planetária (nível do vento gradiente, para os meteorologistas sinóticos). Então, a profundidade da *camada de Ekman* é:

$$D_e = \frac{\pi}{\gamma} \quad (1.22)$$

Observações indicam que o vento se aproxima de seu valor geostrófico à altura de cerca de 1 km acima do solo. Substituindo esse valor em $D_e = 1 \text{ km}$ e $f = 10^{-4}$ na equação (22), pode-se resolver para a viscosidade turbulenta K . O resultado é que $K \cong 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Voltando a equação (10), vemos que $K \cong l'^2 > |\partial \langle V \rangle / \partial z|$. Então, se o cisalhamento do vento médio for da ordem de $5 \text{ m s}^{-1} \text{ km}^{-1}$, o comprimento de mistura l' deve ser de 30 m para que $K \cong 5 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Então o comprimento de mistura é pequeno comparado à

profundidade da camada limite, como deve ser se o conceito de comprimento de mistura é usável. Qualitativamente a característica mais notável da solução da camada de Ekman é o fato de que o vento na camada limite tem uma componente dirigida na direção da baixa pressão. Este é um resultado direto do equilíbrio das três forças, gradiente da pressão, Coriolis e força viscosa, como ilustrado na figura 1.2 abaixo.

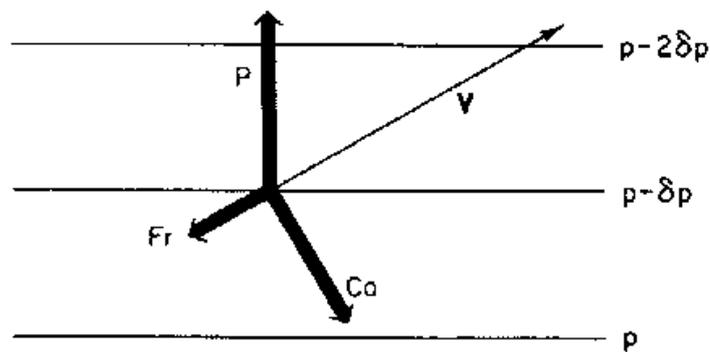


Figura 1.2 – Equilíbrio de forças dentro da camada limite planetária no H. Norte, mostrando que o escoamento tem componente na direção da baixa pressão.

Desde que a força de Coriolis é sempre normal à velocidade e a força friccional é, principalmente, uma força retardadora, sua soma pode somente balancear a força do gradiente da pressão, se o vento está dirigido na direção das baixas pressões, ou seja, à direita do vento geostrófico no H. Norte. Conseqüentemente, é fácil de ver que à medida que a força friccional aumenta, o ângulo de cruzamento com as isóbaras deve aumentar. A camada Ekman ideal descrita nesta secção, se existir, é raramente observada na camada limite atmosférica parcialmente porque, como já foi citado, o coeficiente de mistura turbulenta deve variar rapidamente com a altura próximo ao solo. Em outras palavras, a solução da camada de Ekman é aplicável somente acima da camada superficial. Então, uma representação mais satisfatória para a camada limite planetária pode ser obtida pela combinação do perfil logarítmico da camada superficial com a espiral de Ekman. Novamente, trataremos o coeficiente de viscosidade turbulenta como uma constante, porém

agora aplicaremos a relação, $K \frac{\partial^2}{\partial z^2}(u + iv) - f(u + iv) = -if(u_g + iv_g)$ somente para a região acima da camada superficial. Portanto, em lugar da condição de contorno inferior anterior ($u + iv = 0$), devemos tomar, $u + iv = C_0 e^{i\alpha}$ na qual C_0 é a magnitude da velocidade do vento no topo da camada superficial, geralmente tomado como o nível convencional do anemômetro (10m) e o alfa é o ângulo entre o vento e as isóbaras na camada superficial. Para determinar a constante C_0 , uma segunda condição de contorno torna-se necessária na base da camada superficial. A partir do perfil logarítmico, vemos que, na camada superficial, $\partial u / \partial z = \frac{u_*}{k^2} [z / \ln(z / z_0)]$ com uma expressão semelhante para a componente v . Então, o casamento da solução da camada de Ekman com a solução da superficial requer que devamos ter no topo da camada superficial (agora a base da camada de Ekman)

$$u + iv = C \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) \quad (1.24)$$

em que C é uma constante real.

Por uma questão de conveniência, façamos $z = 0$ designar a base da camada espiral. Então, usando a relação $u + iv = C_0 e^{i\alpha}$, mais a condição que $u + iv \rightarrow u_g$ para $z \rightarrow \infty$, a solução da equação (20) pode ser escrita como:

$$u + iv = (C_0 e^{i\alpha} - u_g) e^{-(1+i)\gamma z} + u_g \quad (1.25)$$

substituindo esta solução na condição (24) e igualando as partes real e imaginária, pode-se obter:

$$C_0 \cos \alpha = \gamma C [C_0 (\text{sen} \alpha - \cos \alpha) + u_g]$$

$$C_0 \text{sen} \alpha = \gamma C [-C_0 (\text{sen} \alpha + \cos \alpha) + u_g]$$

eliminando C , achamos que $C_0 = u_g (\cos \alpha - \text{sen} \alpha)$ e desse modo, a solução (25) se torna

$$u + iv = u_g + \sqrt{2}.u_g \text{sen}\alpha.e^{-(1+i)\gamma z+i[\alpha+(3\pi/4)]}$$

tal que as componentes do espiral no Hemisfério Norte são :

$$u = u_g [1 - \sqrt{2}.\text{sen}\alpha.e^{-\gamma z} \cos(\gamma z - \alpha + \pi / 4)] \quad (1.26)$$

$$v = u_g \sqrt{2}.\text{sen}\alpha.e^{-\gamma z} \text{sen}(\gamma z - \alpha + \pi / 4)$$

para o qual espiral modificado (26) se reduz ao espiral clássico de Ekman (21).

O ângulo α que o vento à superfície faz com as isóbaras é um parâmetro que, a exemplo do coeficiente de viscosidade turbulenta, deve ser escolhido de modo a dar o melhor ajuste às observações. Para perfis típicos do vento, $\alpha \approx \pi / 8$.

6. CIRCULAÇÃO SECUNDÁRIA E “SPIN DOWN”

Na solução idealizada do espiral dada por (21), a componente v do vento multiplicada por ρ dá o transporte de massa que cruza as isóbaras por unidade de área em qualquer nível da camada limite. Então, o transporte líquido (saldo) de massa na direção das pressões mais baixas na camada de Ekman para uma coluna de largura unitária se estendendo verticalmente na camada inteira, é:

$$M = \int_0^{D_e} \rho v dz = \int_0^{D_e} \rho u_g e^{-\pi z / D_e} \text{sen} \frac{\pi z}{D_e} dz \quad (1.27)$$

desprezando as variações locais da densidade dentro da camada limite, a equação da continuidade de massa pode ser escrita:

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \quad (1.28)$$

integrando a equação (28) na profundidade da camada limite, encontramos que

$$(\rho w)_{D_e} = -\int_0^{D_e} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) \right] dz$$

para obter esta relação foi suposto que o nível do chão é tal que $w = 0$ em $z = 0$.

Usando-se as relações dadas em (21) podemos re-escrever esta expressão para o fluxo de massa na vertical no topo da camada de Ekman, onde novamente é suposto que $v_g = 0$, tal que u_g é independente de x ,

$$(\rho w)_{D_e} = -\frac{\partial}{\partial y} \int_0^{D_e} \rho u_g e^{-\pi z/D_e} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{D_e} dz \quad (1.29)$$

comparando a equação (29) com a (28) vemos que o fluxo vertical de massa no topo da camada limite é igual à convergência horizontal de massa dentro da camada limite planetária, que é simplesmente $-\frac{\partial M}{\partial y}$ no exemplo acima.

Notando que $-\frac{\partial u_g}{\partial y} \equiv \zeta_g$ é exatamente a vorticidade geostrófica neste caso, teremos após integrar a equação (29),

$$w_{D_e} = \zeta_g \left| \frac{K}{2f} \right|^{1/2} \quad \text{com} \quad D_e = \frac{\pi}{\gamma} \quad (1.30)$$

Na qual foi desprezado a variação da densidade com a altura na camada limite, assim como também, foi suposto que $1 + e^{-\pi} \approx 1$ (o valor absoluto é usado para que a fórmula seja válida em ambos os hemisférios da terra). Então, obtemos a importante relação que a velocidade vertical no topo da camada limite planetária é proporcional à vorticidade geostrófica. Deste modo o efeito do atrito dentro da camada limite é comunicado diretamente à atmosfera livre através de uma circulação secundária forçada mais pelo atrito do que pelos processos mais lentos da difusão viscosa. Para um sistema típico da escala sinótica, com $\zeta_g \sim 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $f \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ e $D_e \sim 1$, km a velocidade vertical dada por (30) é da ordem de alguns décimos de centímetros por segundo.

O efeito “spin down” é também importante na atmosfera. Ele é mais facilmente ilustrado no caso de uma atmosfera barotrópica. Como já foi mostrado antes, para movimentos de escala sinótica, a equação da vorticidade pode ser escrita aproximadamente como,

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1.31)$$

na qual foi desprezada a vorticidade relativa ζ quando comparada ao f no termo da divergência. Desprezando a variação latitudinal de f vamos avaliar a integral dada por (31) do topo da camada limite onde $z = D_e$ até a tropopausa, onde $z = H$:

$$\int_{D_e}^H \frac{\partial \zeta}{\partial t} dz = \int_{w(D_e)}^{w(H)} dw \quad (1.32)$$

supondo que $w = 0$ em $z = H$ e que a vorticidade pode ser aproximada pelo seu valor geostrófico (que é no caso barotrópico independente da altura) obtém-se, a partir da equação (32)

$$\frac{d\zeta_g}{dt} = \frac{-f}{(H - D_e)} w(D_e)$$

substituindo a partir de (30) e notando que $H \gg D_e$ obtemos uma equação diferencial para a dependência no tempo de ζ_g :

$$\frac{d\zeta_g}{dt} = - \left| \frac{fK}{2H^2} \right|^{1/2} \zeta_g \quad (1.33)$$

esta equação pode ser integrada no tempo para dar:

$$\zeta_g = \zeta_g(0) \exp \left\{ - \left| \frac{fK}{2H^2} \right|^{1/2} t \right\} \quad (1.34)$$

na qual, $\zeta_g(0)$ é o valor da vorticidade geostrófica no tempo $t = 0$. A partir de (34) vê-se que, pode-se definir um tempo $\tau_e \equiv H \left| \frac{2}{fK} \right|^{1/2}$ como o tempo que leva um vórtice barotrópico de altura H para “spin down “ de e^{-1} de seu valor original (esta escala de tempo “e-folding” é conhecida como *spin-down time*). Usando valores típicos para os parâmetros, encontra-se que : $H = 10 \text{ km}$, $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ e $K = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, encontramos que $\tau_e \approx 4$ dias. Então, para distúrbios de escala sinótica nas latitudes médias em uma atmosfera barotrópica, o tempo de spin-down característico é da ordem de uns poucos dias. Esta escala de tempo de decaimento deve ser comparada à escala de tempo para a difusão viscosa. Pode ser mostrado que o tempo para a difusão turbilhonária (eddy diffusion) penetrar em uma profundidade H é da ordem de $\tau_d \approx H^2 / K$ que para os valores usados acima produzem $\tau_d \approx 100$ dias. Desse modo, o processo spin-down é um mecanismo muito mais efetivo para destruir vorticidade em uma atmosfera em rotação que a difusão turbulenta (eddy diffusion). Isto pode ser visto na figura abaixo.

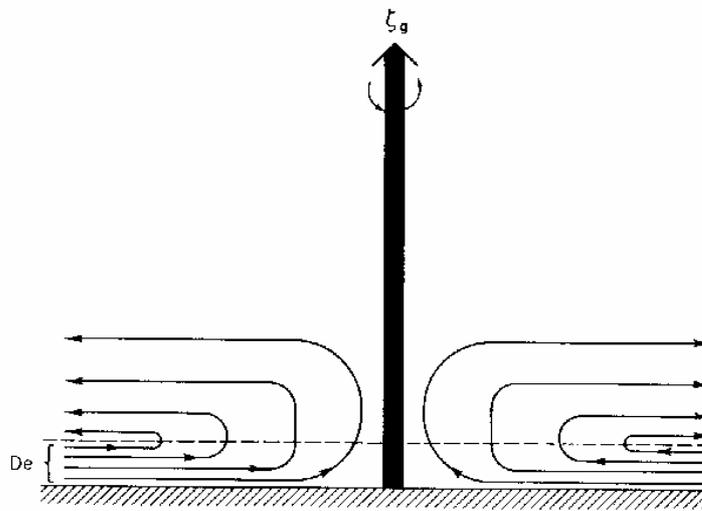


Figura 1.3 - Linhas de corrente para a circulação secundária forçada pela convergência friccional na camada limite planetária para um vórtice ciclônico em uma atmosfera baroclínica estavelmente estratificada.

1. INTRODUÇÃO

Uma finalidade principal da meteorologia dinâmica é interpretar a estrutura observada dos movimentos atmosféricos em grande escala, em termos das leis físicas que regem os movimentos. Ao aplicarmos estas leis aos movimentos atmosféricos, tivemos que fazer sérias restrições, por exemplo, ao movimento horizontal quando da aplicação das leis de Newton, ao movimento vertical ao aplicarmos a lei de conservação da massa etc... de modo que essas leis sozinhas não são suficientes para definirem completamente os movimentos atmosféricos. Então, devemos acrescentar a essas duas, a lei de conservação da energia. Podemos mostrar simplesmente a partir de considerações de escala que estas leis citadas acima, restringem os movimentos (distúrbios) em escala sinótica, tal que, como uma boa aproximação, o campo de velocidade tridimensional pode ser determinado unicamente pelo campo do geopotencial.

Discutiremos inicialmente a estrutura observada dos sistemas sinóticos nas médias latitudes e as circulações médias nas quais estão incluídos. Desenvolveremos duas equações diagnósticas; a *equação de tendência do geopotencial* e a *equação “omega”*, que juntas, nos ajudarão a obter um modelo idealizado para um distúrbio sinótico típico em desenvolvimento.

2. ESTRUTURA OBSERVADA

Nos mapas sinóticos de nossas observações meteorológicas, raramente encontramos sistemas de circulação com vórtices circulares simples, como os modelos idealizados utilizados para estudo. Ao invés disso, encontramos vórtices assimétricos com os valores máximos de velocidade do vento e maiores gradientes de temperatura, concentrados ao longo de bandas estreitas chamadas “frentes”. Esses sistemas são altamente baroclínicos com as amplitudes e fases das perturbações do geopotencial e velocidade, mudando substancialmente com a altura. Essa complexidade é devida em parte, ao fato de que estes sistemas sinóticos não estão superpostos a um escoamento médio, mas estão incluídos em escoamento de escala planetária que é por si altamente baroclínico. Além do mais, este escoamento de escala planetária é influenciado por orografia e contrastes de aquecimento continente-oceano, que são altamente dependentes da longitude.

Então, essa visualização dos sistemas sinóticos, como perturbações superpostas a um escoamento zonal, é útil apenas como uma primeira aproximação, nas análises teóricas dos distúrbios sinóticos do tipo onda.

As figuras a seguir, nos dão uma visualização das estruturas observadas dos distúrbios sinóticos nas médias latitudes.

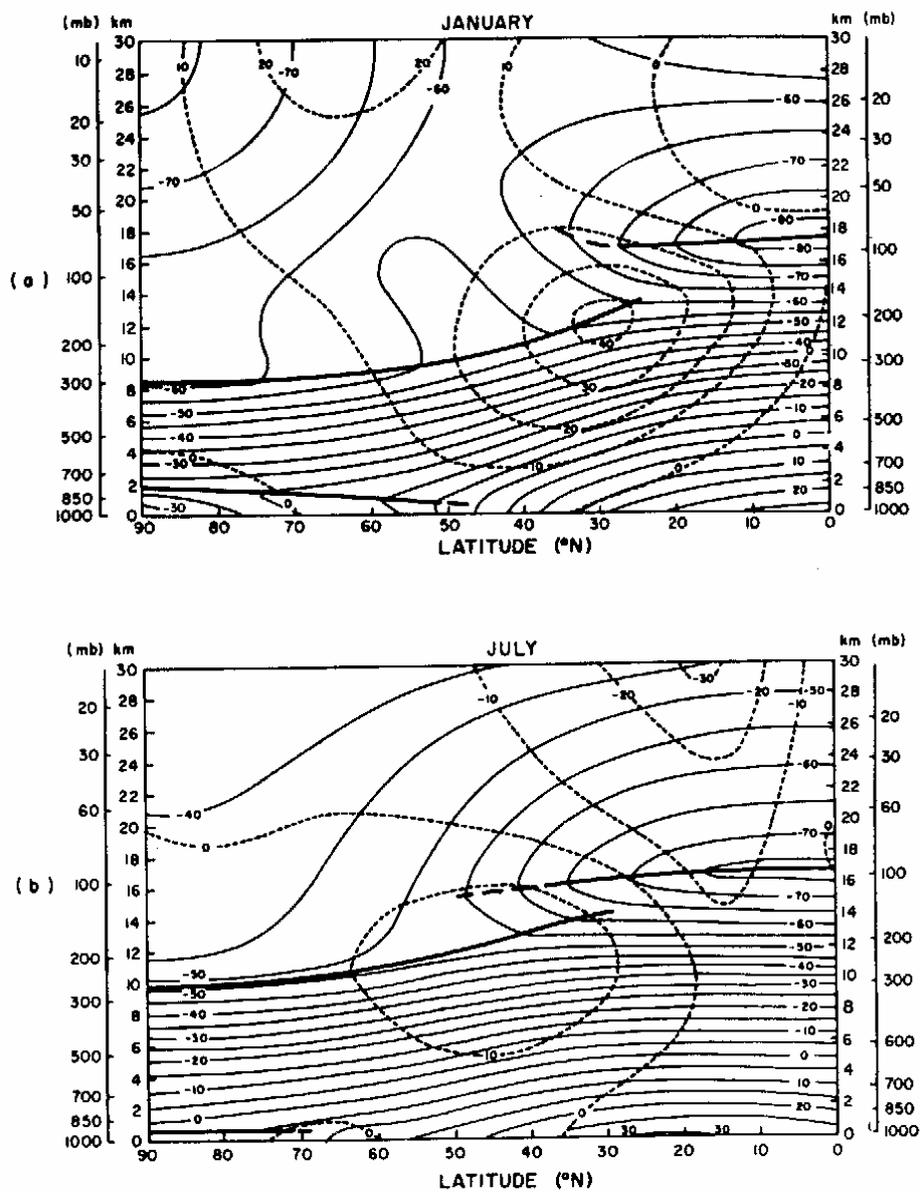


Fig. 2.1 – Secção transversal média meridional para os ventos e temperatura. Os ventos estão representados em tracejado e são dados em m s^{-1} . Temperatura é dada pelas linhas finas contínuas e em $^{\circ}\text{C}$.

Fonte: Holton, J.R. – 1972.

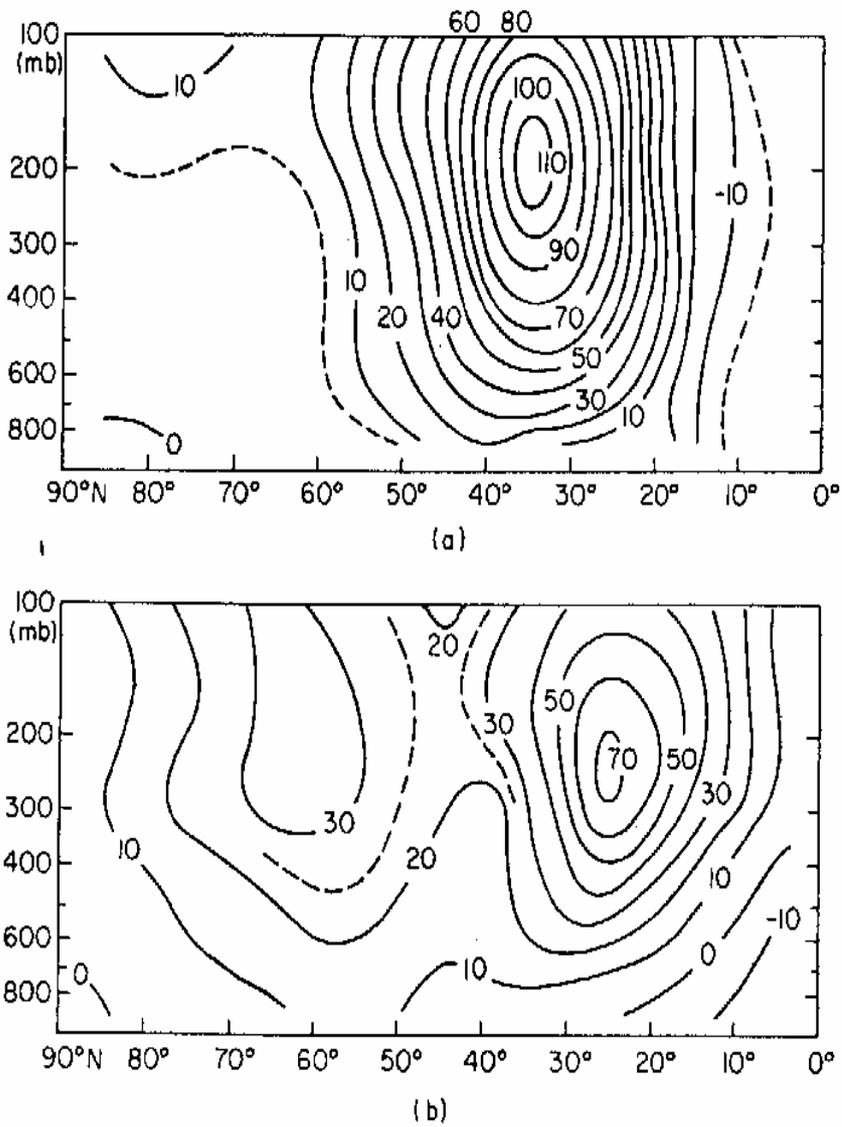


Fig. 2.2 – Diagrama esquemático para ventos médios zonais no inverno do Hemisfério Norte. As velocidades estão dadas em nós.
 a) centrados na longitude 140° leste
 b) centrados na longitude 0° oeste

Fonte: Holton, J. R. 1972

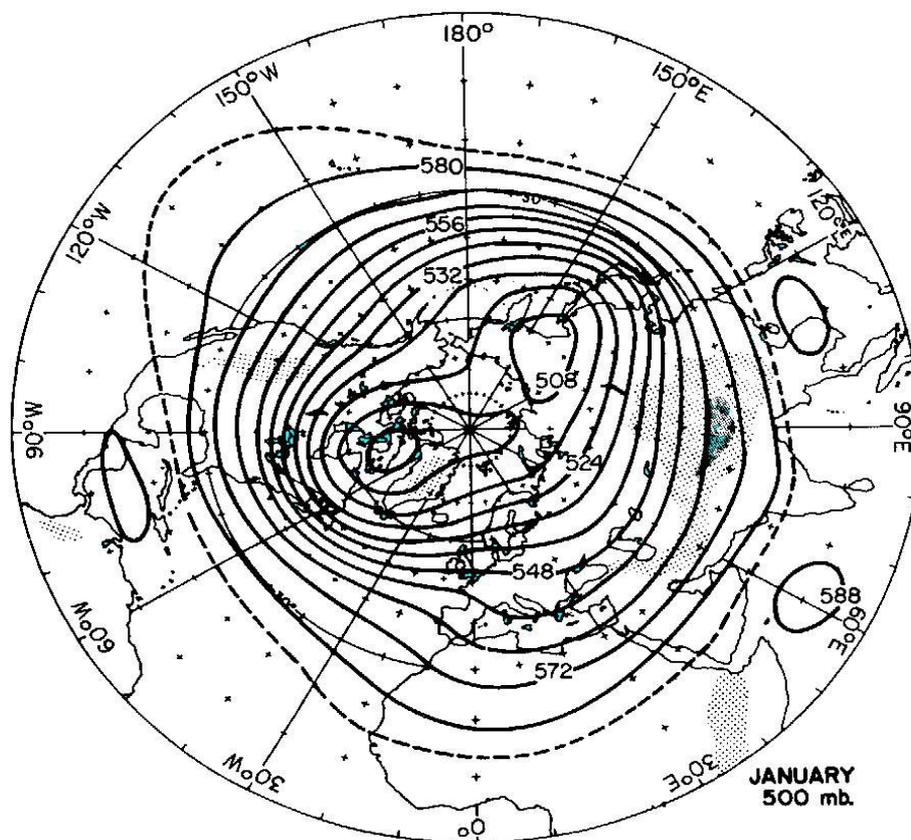


Fig. 2.3 – Contornos médios para os 500 mb em janeiro, Hemisfério Norte. As alturas estão dadas em dezenas de metros.

Fonte: Holton, J. R. – 1972

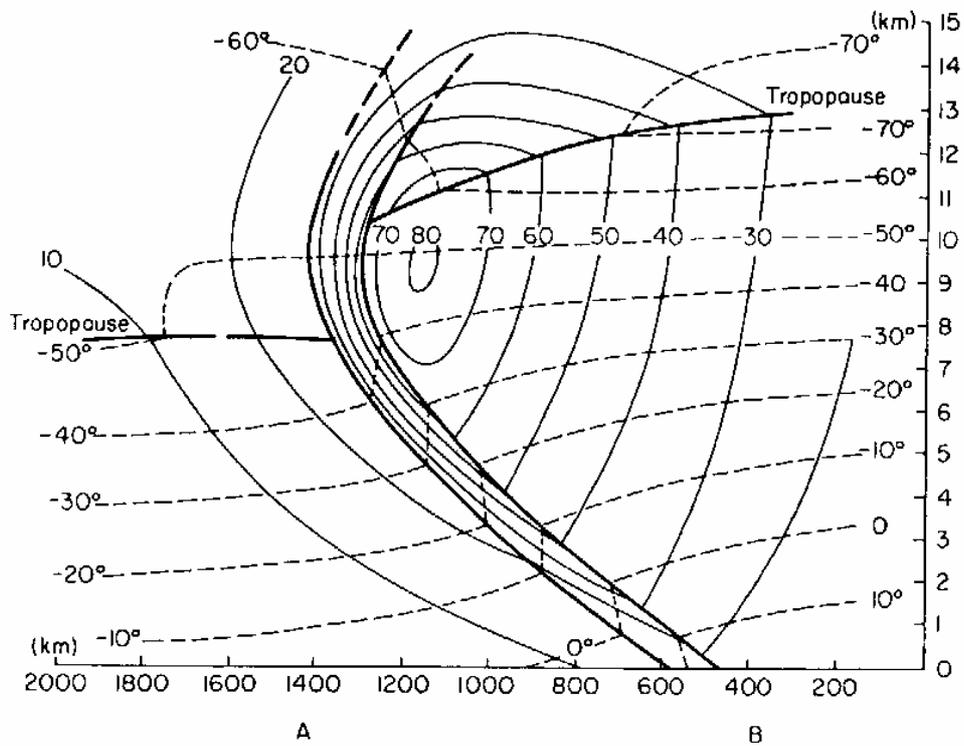


Fig. 2.4 – Diagrama esquemático mostrando isotermas (tracejadas, °C) e isotacas (linhas finas, $m.s^{-1}$) nas vizinhanças de uma frente polar. As linhas cheias indicam limites da zona frontal e tropopausa.

Fonte: Holton, J.R. - 1972.

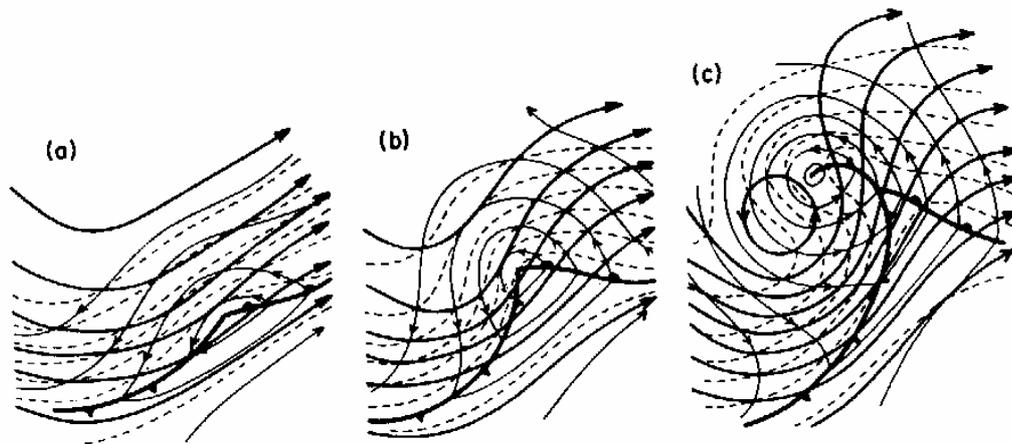


Fig. 2.5 – Contornos esquemáticos 500mb (linhas sólidas cheias) 1000mb (linhas finas) e espessura 1000 – 500 mb (tracejadas) para uma onda baroclínica em desenvolvimento.

Fonte: Holton, J.R. - 1972.

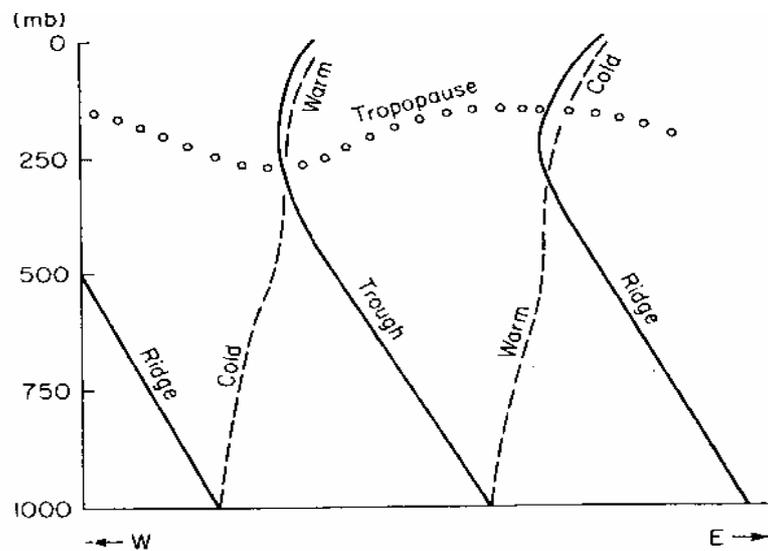


Fig. 2.6 – Secção transversal Leste Oeste de uma onda baroclínica desenvolvendo. As linhas sólidas são eixos dos cavados e cristas, tracejadas são eixos dos extremos de temperatura e a cadeia de círculos representa a tropopausa.

Fonte: Holton, J. R. - 1972.

3. EQUAÇÕES BÁSICAS

Mostramos agora usando considerações de escala que a estrutura observada dos sistemas sinóticos nas médias latitudes podem ser entendidas como uma consequência das restrições impostas às leis do movimento, continuidade de massa e conservação da energia. Como os parâmetros meteorológicos são normalmente medidos considerando-se uma superfície de pressão constante, podemos usar as expressões matemáticas dessas leis, referidas a um sistema de coordenadas isobáricas.

As equações do movimento horizontal para a atmosfera acima da camada de atrito em escala sinótica podem ser escritas:

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (a)$$

(2.1)

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (b)$$

ou usando estas equações para uma superfície isobárica:

$$\frac{du}{dt} - fv + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (a)$$

(2.2)

$$\frac{dv}{dt} + fu + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (\text{b})$$

onde o operador $\frac{d}{dt}$ é agora:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_p + u \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p + v \frac{\partial}{\partial y} \Big|_p + \omega \frac{\partial}{\partial p} \Big| \quad (2.3)$$

com $\omega = \frac{dp}{dt}$ é a taxa individual da mudança na pressão.

a aproximação hidrostática é:

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = -\alpha \quad (2.4)$$

a equação da continuidade,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (2.5)$$

a equação da termodinâmica pode ser escrita

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt} \quad (2.6)$$

e finalmente, a lei dos gases ideais

$$\theta = \frac{p\alpha}{R} \left(\frac{P_o}{p} \right)^{R/cp} \quad (2.7)$$

Esse conjunto de equações é então fechado e determina relações entre as variáveis dependentes $u, v, \omega, \phi, \alpha$ e θ desde que a taxa de aquecimento $\frac{dQ}{dt}$ seja especificada de alguma forma.

Este conjunto de equações, embora já simplificado não parece fácil de se resolver para se obter algum entendimento dos sistemas sinóticos. Podemos simplificá-lo um pouco mais usando considerações de escala e obter um sistema mais apropriado para análise diagnóstico do geopotencial e movimento vertical, que são determinados unicamente para uma dada distribuição do geopotencial.

4. EQUAÇÕES PARA DIAGNÓSTICO

Para obter este conjunto de equações diagnósticos, começamos por eliminar θ reescrevendo a equação termodinâmica 2.6 em termos de ϕ .

Essa transformação é possível devido a suposição de atmosfera hidrostática (na qual se verifica a proporcionalidade: $\frac{\partial \phi}{\partial p} \propto \theta$).

Usando a equação 2.7:

$$\ln \theta = \ln \alpha - \left(\frac{R}{cp} - 1 \right) \ln p + \text{constante} \quad (\ln R, \ln 1000)$$

diferenciando a p constante:

$$\left. \frac{\partial \ln \theta}{\partial x} \right|_p = \left. \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} \right|_p, \left. \frac{\partial \ln \theta}{\partial y} \right|_p = \left. \frac{\partial \ln \alpha}{\partial y} \right|_p \text{ etc...} \quad (2.8)$$

Expandindo a derivada total em 2.6 e usando as relações 2.8,

$$\frac{\partial \ln \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} + v \frac{\partial \ln \alpha}{\partial y} + \omega \frac{\partial \ln \theta}{\partial p} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}$$

Usando a equação 2.4 e desde que,

$$\frac{\partial \ln \alpha}{\partial x} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \text{ etc..., temos:}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \sigma \omega = \frac{\alpha}{c_p} \frac{dQ}{dt} \quad (2.9)$$

onde σ é o parâmetro de estabilidade estática e é definido por:

$$\sigma = \frac{\alpha}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} \text{ para uma atmosfera estaticamente estável, } \frac{\partial \theta}{\partial p} < 0 \text{ tal que } \sigma > 0.$$

A equação 2.9 pode ser mais simplificada ainda considerando-se a validade da aproximação geostrófica. Substituindo,

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \cong \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$$

Se supormos ainda que o calor adicionado ou retirado diabaticamente do sistema é pequeno, comparado aos outros termos da equação 2.9, temos que :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega$$

(I) (II) (III)

Desde que σ pode ser expresso em termos de ϕ , esta equação só contém duas variáveis dependentes: ϕ e ω .

O termo $-\frac{\partial \phi}{\partial p}$ é interpretado como “temperatura”, também como “espessura” da camada.

- I – tendência da “temperatura” ou espessura.
- II – advecção de temperatura pelo vento geostrófico.
- III – termo de esfriamento ou aquecimento adiabático.

Este último termo, expressa a mudança na temperatura (adiabática) que resulta da elevação e conseqüente expansão de uma parcela (ou subsidência e compressão) de ar em um meio estável.

Para simplificar ainda mais o sistema de equações, usualmente, substituem-se as equações para o movimento horizontal pela equação da vorticidade fazendo a diferenciação cruzada de (2.2) **a** e **b**.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) - f \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0 \quad (a)$$

(2.10)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + f \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (b)$$

fazendo (b) – (a)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \underbrace{-\mathbf{V} \cdot \nabla (\zeta + f)}_{(I)} - \underbrace{\omega \frac{\partial \zeta}{\partial p}}_{(II)} - \underbrace{(\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{V}}_{(III)} + \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right]}_{(IV)} \quad (2.11)$$

Onde $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ e todas as outras derivadas são tomadas à pressão constante.

Esses termos são interpretados como sendo,

- I – taxa local de variação da vorticidade relativa,
- II – advecção horizontal de vorticidade absoluta,
- III – advecção vertical de vorticidade relativa,
- IV – termo da divergência,
- V – termo de “twisting” ou “tilting”.

- 1) Em escala sinótica a advecção vertical de vorticidade relativa e o termo de “tilting” são pelo menos duas ordens de grandeza menores que os demais,
- 2) No termo de divergência $\zeta \ll f$,
- 3) No termo de advecção, a velocidade horizontal é geostrófica,
- 4) Substituindo-se a vorticidade relativa pela vorticidade geostrófica.

Com a finalidade de simplificar mais o sistema, podemos expandir o parâmetro de Coriolis em uma série de Taylor em torno de uma latitude ϕ_0 como:

$$f = f_0 + \beta y + (\text{termos de altas ordens})$$

$$\text{com } \beta = \left. \frac{df}{dy} \right|_{\phi_0} \text{ e } y = 0 \text{ em } \phi_0$$

Se designamos por L a escala típica latitudinal dos movimentos, então a razão dos primeiros dois termos na expansão de \underline{f} tem ordem de magnitude:

$$\frac{\beta L}{f_0} \sim \frac{\cos \phi_0 L}{\sin \phi_0 a} \text{ onde } \underline{a} \text{ é o raio da terra.}$$

Quando $L \ll a$, podemos considerar o parâmetro de Coriolis constante, f_0 exceto quando ele aparece diferenciado no termo de advecção, $\frac{df}{dy} = \beta$ e é constante. Esta aproximação é chamada: “aproximação do plano Beta”.

Aplicando todas aproximações acima, obtemos a equação da vorticidade quase-geostrófica.

$$\frac{\partial}{\partial t} \zeta_g = -\mathbf{V}_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) - f_0 \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (2.13)$$

$$\text{onde } \zeta_g = \frac{\nabla^2 \phi}{f_0} \text{ e } \mathbf{V}_g = \mathbf{K} \times \nabla \phi / f_0$$

Deve-se notar que as componentes do vento na horizontal não foram substituídas pelo seu valor geostrófico. É fato que, quando o vento geostrófico é calculado usando-se o parâmetro de Coriolis, o que conta para a divergência são os pequenos desvios desse vento horizontal a partir da geostrofia. Veremos posteriormente que esta divergência e seu correspondente movimento vertical são dinamicamente necessários para manter as mudanças hidrostáticas na temperatura e geostróficas na vorticidade dos sistemas de escala sinótica.

Uma forma alternativa da vorticidade geostrófica é obtida, quando eliminamos a divergência horizontal da equação 2.13.

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = - \frac{\partial \omega}{\partial p}$$

substituindo-se isto em 2.13,

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = - \mathbf{V}_g \cdot \nabla (\zeta_g + f) + f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (2.14)$$

Desde que ζ_g e \mathbf{V}_g são definidas em termos de ϕ , (2.14) pode ser usado para diagnose do campo de ω uma vez dados os campos de ϕ e $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. Essa relação nos dá um método mais preciso de se estimar ω que a equação da continuidade.

Devido ao fato de ζ_g e \mathbf{V}_g serem funções de ϕ , a equação da termodinâmica hidrostática (2.10) e a equação (2.14) possuem, cada uma, apenas duas incógnitas ϕ e ω .

A partir daí, pode-se obter duas relações diagnóstico importantes:

1. Eliminando-se ω entre essas duas equações, obtêm-se uma equação relacionando ϕ a

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Esta é chamada “equação da tendência do geopotencial”.

2. Eliminando-se $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ entre essas duas, obtêm-se uma equação relacionando os campos instantâneos de ω e ϕ - Esta é uma equação para o movimento vertical chamada “equação omega”.

Estas duas relações diagnóstico constituem o centro do *sistema quase-geostrófico*.

5. EQUAÇÃO DA TENDÊNCIA DO GEOPOTENCIAL

Definindo a tendência do geopotencial $\frac{\partial\phi}{\partial t} \equiv \chi$, as equações (2.10) e (2.14) são re-escritas como:

$$\frac{\partial\chi}{\partial p} = -V_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \right) - \sigma\omega \quad (2.15)$$

$$\nabla^2\chi = -f_0 V_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2\phi + f \right) + f_0^2 \frac{\partial\omega}{\partial p} \quad (2.16)$$

Onde foi usada a relação $\zeta_g = \frac{\nabla^2\phi}{f_0}$ de modo que mudando a ordem de

diferenciação, $\frac{\partial\zeta_g}{\partial t} = \frac{\nabla^2\chi}{f_0}$ usando a equação (2.15), multiplicando-se por $\frac{f_0^2}{\sigma}$ e

diferenciando-se com respeito à pressão:

$$\frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial\chi}{\partial p} = f_0^2 / \sigma V_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial p} \right) - f_0^2 \omega$$

Somando-se à equação (2.16):

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi = -f_0 \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\nabla^2 \phi}{f_0} + f \right) + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left(-\mathbf{V}_g \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad (2.17)$$

que é a *equação da tendência do geopotencial*. Na obtenção dessa equação, $\underline{\sigma}$ foi suposta constante. Podemos agora partir para um melhor entendimento da física encerrada nesta equação.

O termo da esquerda:

Esse termo envolve somente derivadas espaciais de χ . Para perturbações tipo onda pode-se mostrar que esse termo é proporcional a $-\chi$. Para demonstrar isto, vamos supor uma variação senoidal para os campos de ϕ e χ em x e y ou seja:

$$\chi = X(p) \sin Kx \sin ly \quad (2.18)$$

onde K e l são números de onda nas direções X e Y definidas $k = \frac{2\pi}{\lambda_x}$ e $l = \frac{2\pi}{\lambda_y}$,

os λ 's são comprimentos de onda nas direções X e Y , respectivamente. O laplaciano horizontal de χ é então:

$$\nabla^2 \chi = -(K^2 + l^2) \chi \quad \alpha - \chi$$

Da mesma maneira, desde que se observa que os sistemas sinóticos nas médias latitudes geralmente têm uma profundidade numa escala comparável a altura da tropopausa, podemos aproximar a variação vertical de χ , tomando:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial p^2} \cong - \left(\frac{f_0 \pi}{P_0} \right)^2 \chi \quad \text{onde } p_0 = 1000 \text{ mb. Ent\~{a}o, o termo da esquerda, pode ser}$$

escrito como, aproximadamente:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \chi \cong - \left[k^2 + l^2 + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{f_0 \pi}{p_0} \right)^2 \right] \chi \quad \text{tal que, o lado esquerdo da}$$

equação (2.17) é proporcional à tendência negativa do geopotencial.

1º Termo da direita

Esse termo é proporcional à advecção da vorticidade absoluta pelo vento geostrófico. Para sua análise podemos dividi-lo em duas partes:

$$\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\nabla^2 \phi}{f_0} + f \right) = \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\nabla^2 \phi}{f_0} \right) + \mathbf{V}_g \frac{df}{dy}$$

A primeira representa a advecção da vorticidade relativa pelo vento geostrófico, e a segunda a advecção geostrófica da vorticidade planetária.

Para distúrbios nos ventos de Oeste, estes efeitos se opõem um ao outro como mostra o diagrama representando um distúrbio tipo onda nos 500 mb na figura abaixo 2.7.

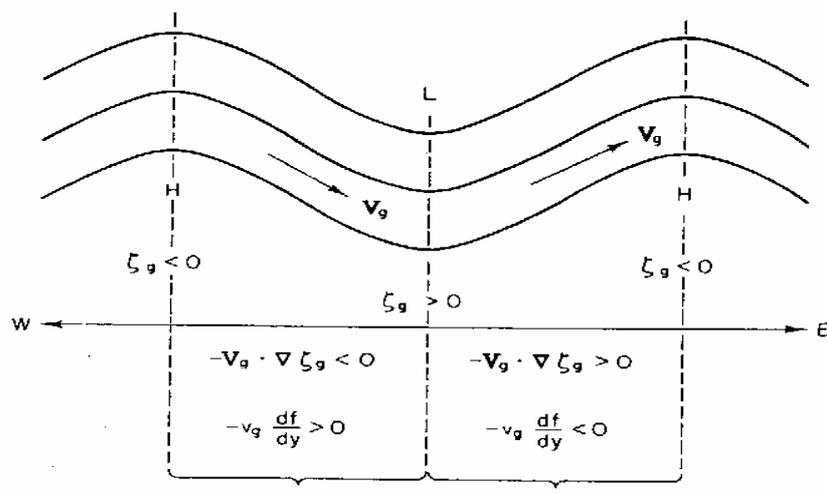


Fig. 2.7 – Diagrama esquemático do campo do geopotencial nos 500 mb, , mostrando regiões de advecção de vorticidade relativa e planetária positivas e negativas.

Nota-se pela observação da figura, que na região I, $V_g \cdot \nabla (1/f_0 \nabla^2 \phi) > 0$ e que, como $V_g < 0$ o termo $v_g \frac{df}{dy} < 0$ de modo que eles tendem a dar um efeito oposto ao outro.

Portanto, a advecção de vorticidade relativa tende a decrescer a vorticidade enquanto que a advecção de vorticidade planetária tende a aumentar a vorticidade. Na região II os efeitos são inversos aos da região I. Conseqüentemente, a advecção de vorticidade relativa tende a mover os cavados e cristas para Leste enquanto que a advecção de vorticidade planetária tende a mover os cavados e cristas para Oeste (movimento retrógrado).

Deve ficar claro entretanto, que na atmosfera real isso vai depender de qual o efeito é predominante.

2º Termo da direita

Esse termo, chamado de advecção diferencial de espessura, nos dá a amplificação ou amortecimento dos sistemas sinóticos nas médias latitudes. Ele tende a ser um máximo nas linhas de cavados e cristas em uma onda baroclínica em desenvolvimento.

Vemos que $V_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$ é a advecção de “espessura”

a qual é proporcional a advecção da temperatura hidrostática e fica claro que,

$$-\frac{\partial}{\partial p} \left[V_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \text{ é proporcional a taxa de variação da temperatura (advecção de)}$$

com altura ou a advecção de temperatura.

Para verificar a contribuição dessa advecção na tendência do geopotencial, consideramos a onda mostrada na figura 2.5. Abaixo da crista nos 500 mb, há uma advecção de ar quente muito forte, associada com a frente quente, enquanto que, abaixo do cavado no mesmo nível, há uma advecção de ar frio associada com a frente fria.

Na região de advecção quente, $\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) > 0$, desde que \mathbf{V}_g tem componente na direção do gradiente da temperatura.

Porém, a advecção quente decresce com altura, tal que:

$$-\frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] > 0$$

Usando o mesmo raciocínio para um cavado abaixo dos 500 mb, onde haja uma advecção fria, concluiremos, que ao longo dos cavados e cristas nos 500 mb, onde a advecção de vorticidade é nula, a equação da tendência determina que para uma onda desenvolvendo:

> 0 na crista

$$\chi \cong \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]$$

< 0 no cavado

Conseqüentemente, como veremos na figura (2.8), o efeito da advecção fria abaixo do cavado nos 500 mb, é aprofundar o cavado e o efeito da advecção quente abaixo de uma crista nos 500 mb, é elevar a crista. Então, é a advecção de temperatura diferencial (ou espessura) que intensifica cavados e cristas em um sistema de onda curta em desenvolvimento.

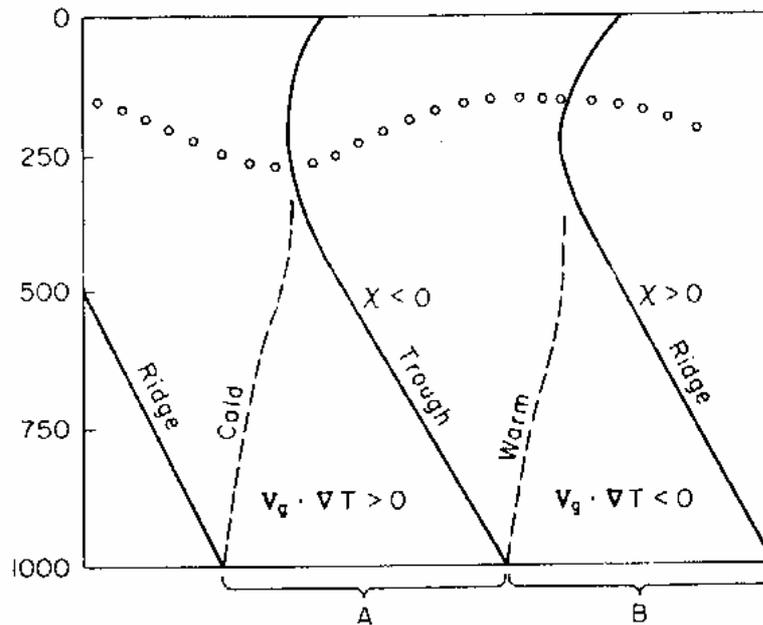


Fig. 2.8. – Secção transversal Leste-Oeste, através de um distúrbio sinótico mostrando as relações entre a advecção de temperatura e a tendência nos altos níveis. A região I, é uma região de advecção fria, enquanto que a região II, é uma região de advecção quente.

6. EQUAÇÃO PARA O MOVIMENTO VERTICAL (*Equação Omega*)

Uma equação para diagnóstico do campo da velocidade vertical, obtêm-se eliminando χ entre as equações (2.15) e (2.16). Para fazer isto, nós tomamos o Laplaciano horizontal de (2.15):

$$\nabla^2 \frac{\partial}{\partial p} \chi = -\nabla^2 \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] - \sigma \nabla^2 \omega \quad (2.19)$$

Diferenciando (2.16) com relação à pressão:

$$\frac{\partial}{\partial p} (\nabla^2 \chi) = -f_0 \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) \right] + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} \quad (2.20)$$

Considerando que a ordem dos operadores nas equações 2.19 e 2.20 pode ser trocada, subtraímos 2.19 de 2.20 para obter, com a eliminação de χ , a conhecida equação para o movimento vertical ou, equação Omega:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{1}{f_0} \nabla^2 \phi + f \right) \right] - \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \quad (2.21)$$

Essa equação é puramente uma relação diagnóstico para o campo de ω em termos do campo instantâneo de ϕ . A equação Omega nos dá uma medida da velocidade vertical que não depende da precisão das observações do vento horizontal, como na equação da continuidade.

Do mesmo modo que a equação de tendência do geopotencial, os termos dessa equação 2.21 podem ser interpretadas individualmente.

Podemos supor que ω tem uma distribuição similar aquela de χ , resultando:

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right) \omega \approx \left[- \left(\mathbf{K}^2 + 1^2 - \frac{1}{\sigma} \left(\frac{f_0 \pi}{p_0} \right)^2 \right) \right] \omega \quad \text{que é proporcional - } \omega.$$

O 1º termo da direita é chamado de advecção de vorticidade diferencial. Este termo é proporcional à taxa de acréscimo com a altura da advecção de vorticidade absoluta. Pode-

se conseguir uma interpretação desse termo a partir da figura 2.9 que representa um sistema baroclínico ideal desenvolvendo-se superfície até o topo da atmosfera.

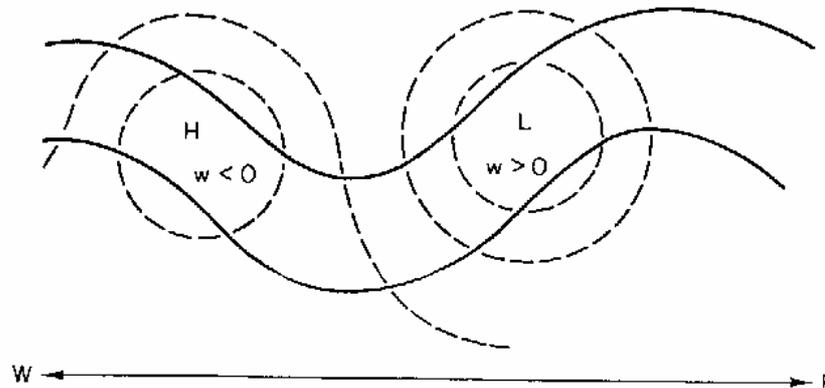


Fig. 2.9 – Contornos esquemáticos 500 mb (linhas cheias) e 1000 mb (tracejadas) indicando regiões de fortes movimentos verticais devidos à advecção de vorticidade diferencial.

Nos centros de altas e baixas pressões à superfície, a advecção de vorticidade nos 1000 mb deve ser bem pequena. Entretanto nos 500 mb a advecção de vorticidade relativa positiva é um máximo acima da baixa à superfície, enquanto que advecção de vorticidade relativa negativa é mais forte acima da alta à superfície. Então, para um sistema de onda curta onde a advecção de vorticidade relativa é maior que a planetária:

$$\frac{\partial}{\partial p} [V_g \cdot \nabla (\zeta + f)] \begin{matrix} < 0 & \text{Acima do ponto H} \\ > 0 & \text{Acima do ponto L} \end{matrix}$$

O segundo termo da direita na equação 2.21, é proporcional à advecção de espessura pelo vento geostrófico.

$$\nabla^2 \left[\mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \alpha - \mathbf{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$$

Se existe advecção quente (fria) este termo é positivo (negativo) tal que na ausência de advecção de vorticidade diferencial, ω seria negativo (positivo). Então, como está indicado na figura (2.10) abaixo, movimento ascendente ocorrerá a Leste da baixa a superfície na região da frente quente e movimento descendente ocorrerá à Oeste da baixa à superfície, atrás da frente fria.

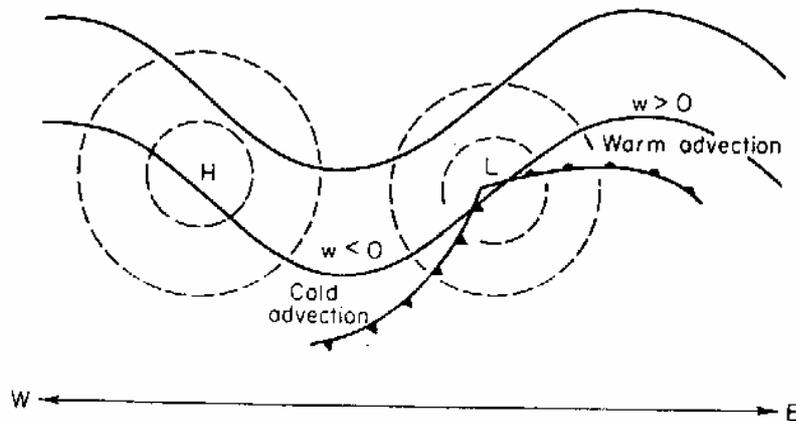


Fig. 2.10 – Contornos esquemáticos 500 mb (linhas sólidas) e 1000 mb (tracejadas) e frentes à superfície indicando regiões de forte movimento vertical devido à advecção de temperatura.

OSCILAÇÕES ATMOSFÉRICAS

1. INTRODUÇÃO

Fisicamente, um movimento que se repete a intervalos regulares de tempo é chamado *periódico*. Se ele se efetua num e noutro sentido sobre uma mesma trajetória, ele é chamado *oscilatório* ou *vibratório*. Uma *oscilação* ou *vibração* é portanto o movimento efetuado pelo móvel num percurso completo de ida e volta. O *período* do movimento é o tempo necessário para uma oscilação completa, ou seja, para cada repetição sucessiva do movimento de ida e volta. A *frequência* do movimento é o número de vibrações ou oscilações por unidade de tempo.

A posição, na qual nenhuma força resultante atua sobre o ponto material, é a sua posição de equilíbrio. A *elongação* é a distância (pode ser linear ou angular) do material oscilante à sua posição de equilíbrio, medida a partir desta, em qualquer instante.

A *amplitude* do movimento \underline{A} é a sua elongação máxima

2. OSCILADOR HARMÔNICO SIMPLES

Se um ponto material vibra em torno da sua posição de equilíbrio, sob a influência de uma força proporcional à sua distância a essa posição de equilíbrio, diz-se que ele efetua um *movimento harmônico simples*. A força deve ser sempre tal que tenda a trazê-lo de volta à posição de equilíbrio e se chama *força restauradora*. Esta força produz o exemplo mais simples de movimento harmônico.

Um exemplo de oscilador harmônico simples é o de um ponto material de massa \underline{M} preso a uma mola, de constante elástica \underline{K} , como mostrado na figura (1). Supomos que a

massa e a mola estejam sobre uma superfície lisa e façamos o movimento do ponto material efetuar-se ao longo do eixo dos x . Quando tal ponto é deslocado até o ponto x (genérico), a mola exerce sobre ele uma força restauradora F , dada por $F = - K x$. (1) (FIG. 1) o sinal (-) indica que o sentido da força é contrário ao do *sentido do movimento*.

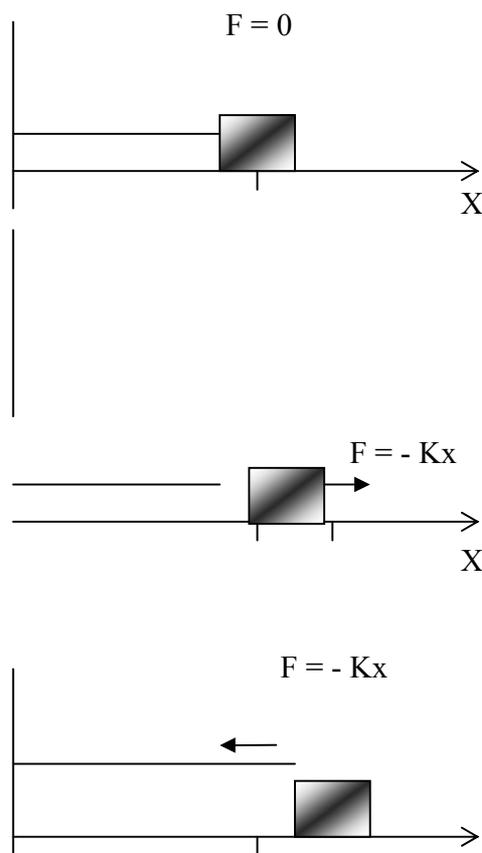


Fig. 3.1 – Sistema de um corpo preso a uma mola, que pode deslizar sobre uma superfície horizontal sem atrito, produzindo um tipo de movimento harmônico simples.

A força aplicada ao ponto material é, portanto, sempre dirigida para a posição de equilíbrio, na qual $x = 0$.
Aplicando-se a 2ª Lei do movimento de Newton ao movimento do corpo da figura (1) obteremos:

$$- Kx = ma$$

ou

$$- Kx = m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (3.1)$$

ou

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0$$

Esta é então chamada equação do movimento de um oscilador harmônico simples e resolvê-la significa achar como a elongação x depende do tempo t para que a equação seja satisfeita.

Resolvendo esta equação diferencial que relaciona a função do tempo $f(t)$ à sua derivada segunda $\frac{d^2 f}{dt^2}$ devemos achar uma função tal que difira de sua segunda derivada

de uma constante $\frac{k}{m}$, e sinal.

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\frac{k}{m} x \quad (3.2)$$

por exemplo: $\cos(t)$

$$\frac{d}{dt} \cos t = -\sin t \quad \text{e} \quad \frac{d^2}{dt^2} \cos t = -\frac{d}{dt} \sin t = -\cos t$$

e como esta propriedade não muda quando consideramos esta função vezes uma constante:

$$x = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad (3.3)$$

teremos então:

$$\frac{d}{dt} x = \omega A \sin(\omega t + \delta)$$

e

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) \quad (3.4)$$

Substituindo (3), (4) em (1):

$$-\omega^2 A \cos(\omega t + \delta) = -\frac{k}{m} A \cos(\omega t + \delta)$$

portanto se ω é tal que $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $x = \cos(\omega t + \delta)$ é realmente solução de (1).

de qualquer maneira as constantes A e δ são completamente gerais de modo que a equação diferencial descreve um grupo ou família de movimentos.

Precisamos determinar o significado da constante ω . Se aumentarmos de $\frac{2\pi}{\omega}$ o tempo na equação (3), obteremos:

$$x = A \cos\left[\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\omega + \delta\right]$$

$$x = A \cos(\omega t + 2\pi + \delta)$$

$$x = A \cos(\omega t + \delta)$$

ou seja, a função se repete a cada $\frac{2\pi}{\omega}$ de tempo significando que $\frac{2\pi}{\omega}$ é o período T de

oscilação. Como $\omega^2 = \frac{k}{m}$, devemos ter:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3.6)$$

De modo que todos movimentos representados pela equação (2) têm o mesmo período de *oscilação* e este é determinado somente pela massa do ponto material *oscilante* (*vibrante*) e pela constante elástica K da mola.

A frequência do oscilador f é o número de vibrações completas que ele efetua na unidade de tempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

portanto $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ a quantidade ω é muitas vezes chamado de “pulsação”.

A constante A tem um significado simples. A função co-seno assume valores de -1 à 1 . A elongação X que é medida a partir da posição central de equilíbrio, onde $x = 0$, tem um valor máximo A . Portanto A em $X = X \text{ máx.}$, é a amplitude do movimento. Desde que A não é fixado, a nossa equação diferencial permite movimentos com várias amplitudes todos os outros permanecendo constantes (frequência, período). A quantidade $(\omega t + \delta)$ chama-se fase do movimento.

Constante δ é a fase inicial.

A amplitude A e a fase inicial δ da *oscilação* são determinadas pelas condições iniciais do problema.

3. MOVIMENTO HARMÔNICO AMORTECIDO

No estudo realizado anteriormente, usamos a suposição de que nenhuma força amortecedora estava presente no nosso oscilador.

Na realidade essas forças existem e como conseqüência o movimento de um pêndulo não é eterno, sabemos que depois de um certo tempo as *oscilações* cessam devido às forças de atrito.

Diz-se nesse caso que o movimento é amortecido pelo atrito e o movimento passa a se chamar *movimento harmônico amortecido*. O atrito é, na maioria das vezes, proveniente da resistência do ar ou das forças internas. O valor da força de atrito geralmente depende da velocidade do corpo, mas é diretamente oposto à mesma.

A equação do movimento de um oscilador harmônico simples amortecido é dado pela segunda lei do movimento de Newton, $F = ma$ onde F é a soma das forças restauradora

$-Kx$ e amortecedora $-b \frac{dx}{dt}$ onde b é uma constante positiva, ou seja:

$$F = ma$$

$$-Kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

se b é pequeno, a solução é $x = A \exp\left(\frac{-bt}{2m}\right) \cos(\omega' t + \delta)$ onde:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

isto pode ser visto graficamente:

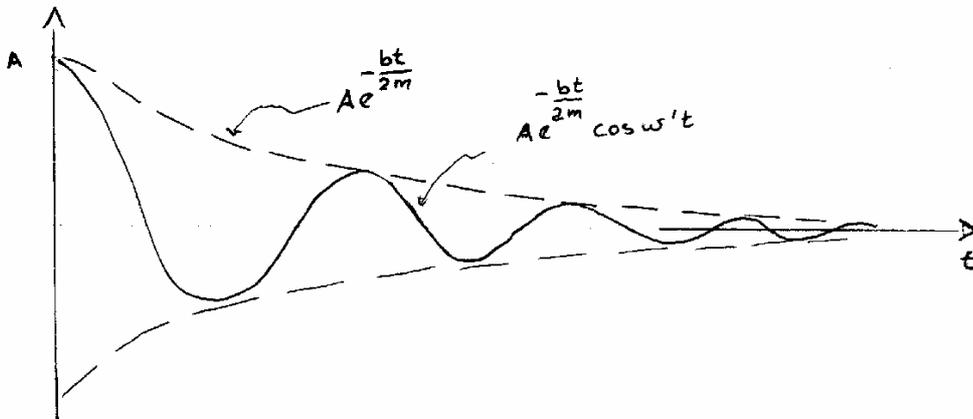


Figura 3.2 - Diagrama esquemático da solução da equação para o movimento harmônico amortecido.

Essa solução pode ser interpretada do seguinte modo:

Primeiro, a frequência é menor e o período mais longo, quando existe atrito. O atrito diminui o movimento como era de se esperar. Se não houvesse atrito, b seria nulo e ω' seria igual a $\sqrt{k/m}$ ou ω , que é a pulsação do movimento não amortecido. Quando existe atrito, ω' é menor que ω . Em segundo lugar, a amplitude do movimento, gradualmente, diminui tendendo a zero (por que não se anula?). Se não houvesse atrito, b seria nulo e a amplitude teria um valor constante A .

4. OSCILAÇÕES FORÇADAS E RESSONÂNCIA

As discussões anteriores eram concernentes as oscilações naturais de um corpo, isto é, as oscilações que ocorrem quando ele é solto a uma distância qualquer de sua posição de equilíbrio e oscila livremente em torno dessa posição de equilíbrio.

Vimos que no caso de uma massa presa a uma mola, a frequência natural de oscilação do sistema é:

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad \text{sem atrito}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

para o caso com atrito.

Porém, uma situação diferente surge quando o corpo é submetido a uma força oscilatória externa. As oscilações resultantes têm a frequência da força externa e não a natural do corpo. Porém, a resposta do corpo depende da relação entre as frequências forçada e natural.

Uma sucessão de impulsos, convenientemente espaçados, pode produzir uma oscilação de grande amplitude. O problema das oscilações forçadas é muito geral. A equação do movimento do oscilador forçado resulta da segunda lei do movimento. Somando-se à força restauradora $-kx$ e à força $-b \frac{dx}{dt}$ amortecedora uma força externa aplicada.

Por simplicidade, suponhamos que esta força externa seja dada por $F_m \cos \omega^* t$. Aqui F_m é o valor máximo da força externa e ω^* a sua frequência angular. Podemos supor que essa força esteja aplicada diretamente à massa oscilante então, de $F = ma$ Temos:

$$-kx - b \frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega^* t = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ou

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega^* t$$

cujas solução é

$$x = A^* \text{sen} (\omega^* t - \alpha)$$

onde

$$A^* = \frac{F_m}{G} \text{ é a amplitude}$$

$$G = \sqrt{(m \omega^* - k)^2 + b^2 \omega^{*2}} = \sqrt{m^2 (\omega^{*2} - \omega^2)^2 + b^2 \omega^{*2}}$$

e

$$\alpha = \arccos \frac{b \omega^*}{G}$$

Observa-se pela solução da equação que o sistema vibra com a frequência angular da força impulsionadora, ω^* , ao invés de fazê-lo com a frequência natural ω e que o movimento é harmônico sem amortecimento.

O fator G é grande, quando a frequência angular da força impulsionadora, ω^* , é muito diferente da frequência natural sem amortecimento, ω , do sistema, F_m/G é pequena. Quando a frequência da força impulsionadora se aproxima da frequência natural, sem amortecimento, G torna-se menor e a amplitude cresce.

A amplitude atinge um valor máximo, quando as duas frequências tendem a se igualar.

Esse fenômeno chama-se *ressonância*; a frequência ω^* que dá a amplitude máxima à vibração forçada do sistema chama-se *frequência de ressonância*.

A amplitude da vibração forçada depende da força de atrito, bem como da frequência da força impulsionadora. Quanto maior o atrito, maior é G e menor a amplitude

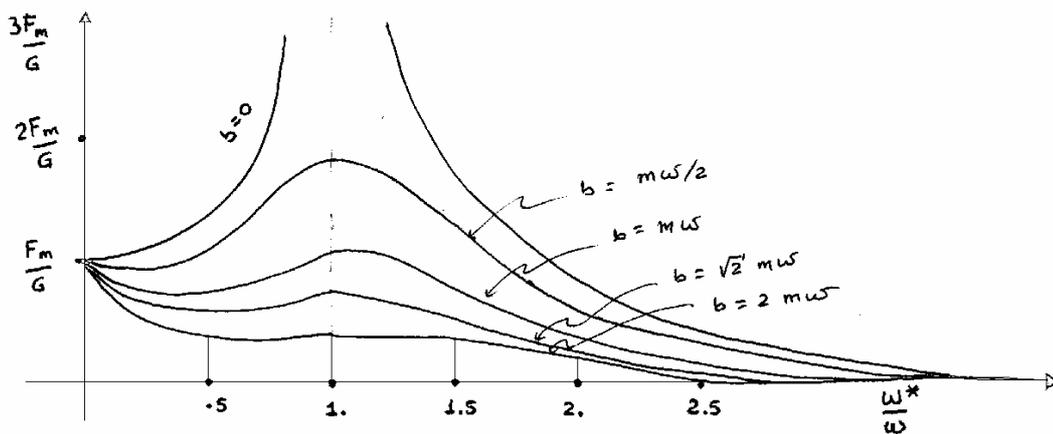


Figura 3.4 – Diagrama mostrando a relação entre as frequências de oscilação natural e da força impulsionadora externa. Quando elas tendem a se igualar ocorre o fenômeno da ressonância.

Nesta figura estão representadas cinco curvas dando a amplitude de vibração forçada, em função da razão da frequência da força impulsionadora, ω^* , para a frequência natural do sistema sem amortecimento da constante de amortecimento b .

A primeira curva mostra a amplitude quando $b = 0$, isto é, quando não há amortecimento. Neste caso, a amplitude torna-se infinita para $\omega^* = \omega$ porque a força aplicada fornece energia ao sistema, continuamente, e não há dissipação. Na prática, sempre existe algum atrito, de modo que a amplitude adquire um valor grande, porém, finito. Frequentemente o sistema se rompe quando a amplitude torna-se muito grande.

5. OSCILAÇÕES ATMOSFÉRICAS

As oscilações que ocorrem na atmosfera podem ser melhor entendidas, isolando-se os movimento tipo onda que ocorrem na mesma. Para se isolar este movimentos, torna-se necessário, resolver o sistema de equações da hidrodinâmica usados na meteorologia e, a partir da solução geral, tirar-se informações sobre tais movimentos. Devido a não linearidade das equações constituintes, é praticamente impossível obter-se solução analítica desse sistema, de modo que, nos restam duas alternativas mais imediatas:

- I – obter-se a solução aproximada a partir de métodos numéricos.
- II – linearizar o sistema e, a partir da solução para o sistema linear, inferir as informações sobre o sistema não-linear.

Usando a segunda alternativa, estudaremos um método para linearizar esse sistema, denominado “método das perturbações”.

Método das Perturbações

As equações que regem os movimentos atmosféricos de uma maneira geral, são:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V} = -\alpha \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} - \mathbf{g} | \mathbf{k} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{V} \quad (3.2)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} \frac{dq}{dt} \quad (3.3)$$

$$p\alpha = RT \quad (3.4)$$

onde o operador

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

As principais suposições desse método, são:

1) A existência de um estado básico dado pelos seus valores de $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\rho}$ que devem satisfazer as equações acima.

2) O movimento total é dado instantaneamente pela soma das variáveis do estado básico mais as perturbações, isto é:

$$u = \bar{u} + u' ; v = \bar{v} + v' ; w = \bar{w} + w' ; p = \bar{p} + p' ; \alpha = \bar{\alpha} + \alpha' ; \rho = \bar{\rho} + \rho' .$$

etc...,

3) Produtos de perturbações são pequenos o bastante para serem desprezados.

Então, a nossa velocidade \underline{V} por exemplo será escrita:

$$\underline{V} = Iu + jv + Kw = Iu + Iu' + JV + jv' + KW + Kw' \quad (3.5)$$

e assim, semelhantemente para as outras variáveis.

Vamos agora substituir essas novas variáveis nas equações de 3.1 à 3.4:
Equação para o movimento na direção \underline{x} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} - fV + \frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + W \frac{\partial u'}{\partial z} - \\ & - U' \frac{\partial U}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + w' \frac{\partial U}{\partial z} + u' \frac{\partial U'}{\partial x} + v' \frac{\partial U'}{\partial y} + w' \frac{\partial U'}{\partial z} = \bar{\alpha} \frac{\alpha \bar{p}}{\partial x} - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial x} - \\ & \bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} - \alpha' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \end{aligned}$$

Os últimos termos do lado esquerdo da igualdade são pequenos e podem ser desprezados (3ª suposição). Também, desde que o estado básico satisfaça à equação, temos:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} - fV = - \bar{\alpha} \frac{\alpha \bar{p}}{\partial x}$$

Também do lado direito da igualdade, $\alpha' \frac{\partial p'}{\partial x}$ é pequeno; ficamos então:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + V \frac{\partial u'}{\partial y} + W \frac{\partial u'}{\partial z} - fv' + u' \frac{\partial U}{\partial x} + v' \frac{\partial U}{\partial y} + w' \frac{\partial U}{\partial z} = -\bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial x} - \bar{\alpha} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad (3.6)$$

Essa equação é então linear, desde que as variáveis do estado básico são supostas conhecidas, sendo portanto, especificadas pelo problema particular de cada um.

Fazendo manipulações semelhantes, chegamos para as equações dos movimentos nas direções y e z:

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + V \frac{\partial v'}{\partial y} + W \frac{\partial v'}{\partial z} + fu' + u' \frac{\partial v}{\partial x} + v' \frac{\partial v}{\partial y} + w' \frac{\partial v}{\partial z} = -\bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial y} - \alpha' \frac{\partial p'}{\partial y} \quad (3.7)$$

e

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} + V \frac{\partial w'}{\partial y} + W \frac{\partial w'}{\partial z} + u' \frac{\partial w}{\partial x} + v' \frac{\partial w}{\partial y} + w' \frac{\partial w}{\partial z} = -\bar{\alpha} \frac{\partial p'}{\partial z} - \alpha' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \quad (3.8)$$

A equação da continuidade para o movimento total é

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\nabla \cdot V$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

Aplicando o mesmo raciocínio anterior, ficamos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + V \frac{\partial \rho'}{\partial y} + W \frac{\partial \rho'}{\partial z} + u' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} = -\rho' \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) \quad (3.9)$$

$$-\bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} \right)$$

e finalmente, a equação da termodinâmica após manipulações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta'}{\partial t} + u' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + U \frac{\partial \theta'}{\partial x} + V \frac{\partial \theta'}{\partial y} + W \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \\ \frac{Q \dot{\theta}'}{C_p T} - \frac{Q \dot{\bar{\theta}}}{C_p (\bar{T})^2} \cdot T \end{aligned} \quad (3.10)$$

Esse sistema tem validade para um campo onde,

$$\frac{u'}{U} \ll 1, \frac{v'}{V} \ll 1, \dots \text{ etc.}$$

O sistema é geral porque excetuando-se o desprezo dos produtos das perturbações (que são pequenos) não fizemos nenhuma aproximação. Isso garante a capacidade do conjunto de equações de 3.5 à 3.10 descrever os fenômenos físicos de todas espécies (meteorológicos e não-meteorológicos).

Essa linearização que foi atingida forçadamente é numericamente uma boa aproximação, mas perde uma característica importante fisicamente que são as interações entre os diversos componentes da ondas $\left(U \frac{\partial v'}{\partial x}, \text{ por exemplo } \right)$.

Propriedades das Ondas

Vamos ver porque é que a maioria dos autores supõem que as perturbações têm a forma de uma onda. As equações linearizadas das perturbações para o escoamento atmosférico, podem frequentemente ser combinadas para dar uma única equação que é uma generalização da equação da onda:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

A essa equação 3.11 correspondem soluções para ondas de perfis arbitrários movendo-se com velocidade c nas direções positiva e negativa do eixo \underline{x} . Considerado um perfil arbitrário para o campo $\psi = f(x)$ em $t = 0$

Se esse perfil se move na direção positiva x sem mudança de forma, então: $\psi = f(x')$ em que x' é uma coordenada movendo-se com o perfil (velocidade c) tal que $x = x' + ct$. Então, em termos de coordenada fixa x , podemos escrever:

$$\psi = f(x - ct) \quad (3.12)$$

Correspondendo a um perfil que se move na direção positiva x com velocidade c sem mudança de forma. Pode ser verificado que (3.12) é realmente uma solução de (3.11) tanto como uma onda viajando na direção negativa dos x , ou seja $\psi = (x + ct)$.

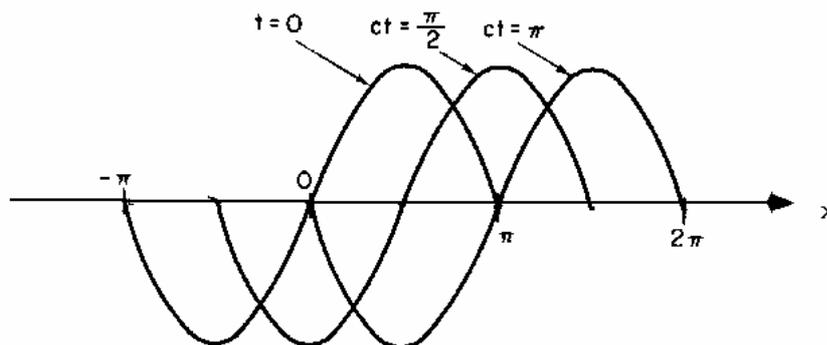


Figura 3.4 - Uma onda senoidal viajando na direção positiva dos x com velocidade c ,
 $\psi = f(x - ct)$.

A representação de uma perturbação como uma onda senoidal simples nos parece a primeira vista uma super-simplificação, uma vez que os distúrbios atmosféricos nunca são puramente senoidais. Isto nos leva a crer, que uma função “razoavelmente bem comportada”, função da longitude, pode ser representada como sendo a soma da média zonal mais uma série de Fourier de componentes senoidais.

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \text{sen} K_m x + B_m \text{cos} K_m x) \quad (3.13)$$

onde $K_m = \frac{2\pi m}{L}$ é o “número de onda zonal”

L é a distância em torno de um círculo de latitude.

m é um número inteiro, significando o n.º de ondas em torno de um círculo de latitude.

Precisamos então calcular os coeficientes A_m B_m

Cálculo de A_m :

Multiplicando ambos lados de 3.13 por $\text{sen} \frac{2\pi n x}{L}$, integrando em torno de um círculo de latitude e aplicando as relações de ortogonalidade:

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi mx}{L} \sin \frac{2\pi nx}{L} dx = \int_{L/2, m=n}^0, m \neq n$$

e

$$A_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2\pi mx}{L} dx$$

Usando o mesmo raciocínio após multiplicar os dois lados de 3.12 por $\cos \left(\frac{2\pi nx}{L} \right)$:

$$B_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2\pi mx}{L} dx$$

onde:

A_m e B_m são chamados “Coeficientes de Fourier” enquanto que

$$f_m(x) = A_m \sin K_m x + B_m \cos K_m x \quad (3.14)$$

é chamado o harmônico de ordem m de $f(x)$. Por exemplo, se os coeficientes de Fourier são calculados para uma quantidade tal como a dependência longitudinal das perturbações do campo do geopotencial observado, eles mostram que as maiores amplitudes dos componentes de Fourier serão aqueles para os quais m é o número aproximado de cavados e crestas observados em volta de um círculo de latitude. Quando somente a informação quantitativa é desejada, é geralmente suficiente limitar a análise a um simples componente típico de Fourier, e supor que o comportamento do campo real será similar ao daquele componente.

Podemos usar a expressão 3.14 na forma composta (relação complexa) de acordo com a fórmula de Euler.

$$F_m(x) = \operatorname{Re} \left\{ C_m e^{ikmx} \right\}$$

e

$$f_m(x) = \operatorname{Re} \left\{ C_m \cos K_m x + i C_m \sin K_m x \right\} \quad (3.15)$$

onde $\operatorname{Re} \{ \}$ significa “parte real de” de C_m é um coeficiente complexo.

Comparando 3.14 e 3.15, vemos que as representações de $f_m(x)$ serão idênticas se:

$$B_m = \operatorname{re} \{ C_m \} \text{ e } A_m = - \operatorname{Im} \{ C_m \}$$

onde $\operatorname{Im} \{ \}$ significa “parte imaginária de” essa notação exponencial será usada daqui por diante.

6. APLICAÇÕES DO MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES

6.1 - Ondas Acústicas

Iniciando uma série de aplicações da teoria da perturbações no estudo de alguns movimentos tipo onda pura que ocorrem na atmosfera, iniciamos com as ondas de som. Essas ondas podem ser definidas como oscilações longitudinais que se propagam como resultado do campo da divergência no fluido.

Suposições:

I – para eliminar oscilações transversais, supomos que as ondas se propagam na direção x

II – supomos que $v = w = 0$

III – eliminamos toda dependência sobre y e z supondo $u = u(x,t)$.

IV – o movimento é adiabático

Com estas restrições, as equações do movimento, continuidade e termodinâmica podem ser escritas:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = 0 \quad (3.18)$$

onde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}$$

com $\theta = T \cdot (p_0 / p)^{R/C_p}$ e $P_0 = 1000 \text{ mb}$

usando a equação de estado, $\theta = \frac{P}{\rho R} (p_0/p)^{R/C_p}$

tomando os logaritmos e derivando em relação ao tempo aplicamos em 3.18 para obter:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \ln p - \gamma \frac{d}{dt} \ln \rho = 0 \quad (3.19)$$

na qual,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$$

Eliminando ρ entre 3.17 e 3.19 obtemos,

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

agora aplicando a teoria das perturbações ao nosso sistema formado por 3.16, 3.17 e 3.20, supondo que:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u} + u'(x, t) \\ p(x, t) &= \bar{p} + p'(x, t) \\ \rho(x, t) &= \bar{\rho} + \rho'(x, t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

substituindo as relações 3.21 nas equações 3.16, 3.17 e 3.20 temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') + \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') = 0 \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{p} + p') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + \gamma (\bar{p} + p') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} + u') = 0$$

aproximando o termo da densidade por uma expansão binomial :

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right)^{-1} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \right) \approx \frac{1}{\bar{\rho}} \text{ desde que } \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \ll 1$$

simplificando e re-arranjando o conjunto 3.22 ficamos com:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) u' + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (3.23a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) p' + \gamma \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.23b)$$

eliminando u' com o uso de $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)$ em 3.23b e substituindo em 3.23a, obtemos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' - \frac{\gamma \bar{\rho}}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (3.24)$$

esta é uma forma da equação da onda (o leitor deve compará-la com a equação 3.11). Cuja solução é conhecida.

Supondo solução tipo onda,

$$p'(x, t) = A e^{ik(x-ct)}$$

Usando essa solução em 3.24 chamando de $E = e^{ik(x-ct)}$ que será comum aos termos, temos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 AE - \frac{\gamma \bar{\rho}}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial x^2} AE = 0$$

lembrando que:

$$\frac{\partial}{\partial x} E = i k E; \quad \frac{\partial}{\partial t} E = -i k c E; \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} E = i^2 k^2 E \quad e \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = i^2 k^2 c^2 E$$

Obtemos:

$$c^2 - 2Uc + U^2 - \frac{\gamma \bar{\rho}}{\rho} = 0$$

resolvendo para c :

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{\gamma R \bar{T}} \quad (3.25)$$

$$\text{desde que, } \frac{\bar{p}}{\rho} = R \bar{T}$$

Isto significa que as ondas sonoras se propagam relativamente à corrente zonal com

velocidade $\sqrt{\gamma R \bar{T}}$. Esta quantidade é chamada “velocidade adiabática do som”.

6.2 - Ondas de Gravidade

Como um segundo tipo de movimento ondulatório na atmosfera, estudaremos as oscilações transversais conhecidas como ondas de gravidade.

Supomos um escoamento de um fluido incompressível no qual existe uma corrente básica zonal U em uma atmosfera sem rotação e que tem espessura H . Para as perturbações, tomaremos $v' = 0$

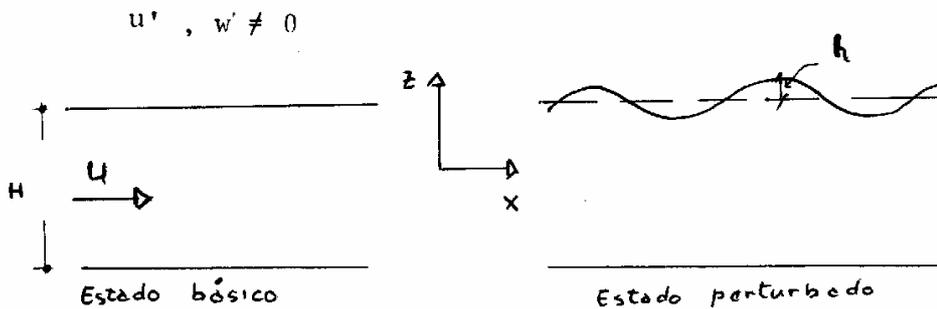


Figura 3.5 - Diagrama esquemático para os estados básico e perturbado supostos no problema.

Com as suposições dadas, o nosso sistema de equações para as perturbações temos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} & (a) \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial z} & (b) \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 & (c) \end{aligned} \right\} (3.25)$$

desde que o estado básico satisfaz essas equações, temos:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g = 0 \quad \text{para } 0 \leq z \leq H$$

De uma vez que o fluido é incompressível, a equação da termodinâmica não entra no problema e as condições de contorno que precisamos são:

I – $w = 0$ quando $z = 0$

II – a pressão em $z = H$ é constante

Estruturando as soluções para perturbações como ondas que viajam ao longo dos x :

$$u' = \alpha(z) e^{ik(x-ct)}$$

$$w' = \beta(z) e^{ik(x-ct)} \quad \text{onde } \alpha, \beta, \gamma \text{ são amplitudes}$$

$$p' = \gamma(z) e^{ik(x-ct)}$$

chamando $e^{ik(x-ct)} = E$ e substituindo essas soluções no sistema 3.25:

$$-ikc \alpha(z)E + Uik \alpha(z)E = -\frac{1}{\rho} ik \gamma(z)E \quad (a)$$

$$-ikc \beta(z)E + Uik \beta(z)E = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma}{\partial z}(z)E \quad (b)$$

$$ik \alpha(z)E + \frac{\partial}{\partial z} \beta(z)E = 0 \quad (c)$$

desde que E é comum e não-nulo podemos dividir tudo por E e depois eliminar quaisquer dos dois α, β, γ .

Escrevendo a equação para $\beta(z)$ faremos $\frac{\partial}{\partial z}$ (c) e $\frac{\partial}{\partial z}$ (a) e usando (b)

$$ik \alpha'(z) + \beta''(z) = 0 \quad (a)$$

$$ik(U-c)\alpha'(z) = -\frac{1}{\rho} ik \gamma'(z) \quad (3.27) \quad (b)$$

$$-\frac{1}{\rho} \gamma'(z) = ik(U-c)\beta'(z) \quad (c)$$

ou

$$(\bar{u}-c)[\beta''(z) - k^2 \beta(z)] = 0 \quad (1.28)$$

Se U não for função de z (escoamento uniforme) os coeficientes da equação são constantes.

Então para ser satisfeita a igualdade:

1°] $\bar{u} = c$
 ou,
 2°] $\beta''(z) - k^2 \beta(z) = 0$ (3.29)

a solução geral dessa equação é

$$\beta(z) = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

onde A e B são constantes (ver solução de equações diferenciais parciais em qualquer livro texto de matemática) determinar aplicando as c.c., w tem que ser 0 quando $z = 0$, daí

$$A + B = 0 \text{ ou } A = -B \text{ e vice-versa.}$$

então:

$$\beta(z) = A(e^{kz} - e^{-kz})$$

ou

$$\beta(z) = 2A \operatorname{sen} h(kz) \quad (3.30)$$

com esse valor de $\beta(z)$ tiramos então α e γ usando 3.27 a

$$ik \alpha'(z) + \beta''(z) = 0$$

$$ik \alpha'(z) = -2A k^2 \operatorname{sen} h(kz)$$

e

$$\alpha(z) = 2iA \cos h(kz) \quad (3.31)$$

de 1.27c temos:

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \gamma'(z) = (U - c)\beta(z)$$

$$\gamma'(z) = \bar{\rho}(U - c)\beta(z)$$

$$\gamma(z) = -i\bar{\rho}(U - c)2A \cos h(kz) \quad (3.32)$$

então trazendo (30), (31), (32) nas soluções:

$$\begin{aligned}
u' &= 2Ai \cosh(kz) e^{ik(x-ct)} \\
w' &= 2A \operatorname{sen} h(kz) e^{ik(x-ct)} \\
p' &= -2Ai \bar{\rho} (\bar{u} - c) \cosh(kz) e^{ik(x-ct)}
\end{aligned}$$

Resta-nos aplicar a segunda c. c usando o fato que a pressão no topo $t = H$ é constante, temos para partículas na superfície livre:

$$\frac{D}{Dt} (\bar{p} + p') = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{p} + p') + (U + u') \frac{\partial}{\partial x} (\bar{p} + p') + (V + v') \frac{\partial}{\partial y} (\bar{p} + p') + (W + w') \frac{\partial}{\partial z} (\bar{p} + p') = 0$$

ora

$$w = 0, v' = 0$$

\bar{p} no estado básico não varia com x, t, y então, linearizando essa condição de contorno:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + U \frac{\partial p'}{\partial x} + w' \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0 \quad (a) \quad (3.34)$$

e

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = \bar{\rho} g \quad (b) \text{ que é coerente com a teoria das perturbações.}$$

aplicando 3.34 em $z = H$ quando a superfície perturbada apresenta pequena distorção e substituindo 3.34 b em 3.34 a e usando as soluções 3.33:

$$\begin{aligned}
& -2A i \bar{\rho} (U - c) \cos h(kz) (-ikc) E + U ik E [-2A i \bar{\rho} (U - c)] \cos h(kz) \\
& + 2A \operatorname{sen} h(kz) (-\bar{\rho} g) E = 0 \quad \text{para } z = H
\end{aligned}$$

re-arranjando:

$$k \cos h(KH) [-c(U - c) + U(U - c)] - g \operatorname{sen} h(KH) = 0$$

$$(c - U)^2 = g/k \tan h(KH)$$

$$c = U \pm \sqrt{g/k \tan h (KH)} \quad (3.35)$$

Esta é então a velocidade de fase de ondas neutras (c será sempre real) viajando na direção x. U é chamada *parcela convectiva* e $g/k \tan h (KH)$ é a *parcela dinâmica*. Se a equação 3.25 (b) for reduzida para a hidrostática, essa dependência de c com k (N.º de onda vertical) pode ser vista a partir da tabela abaixo.

Desde que $k = \frac{2\pi}{L}$.

$$c = U \pm \sqrt{gL/2\pi \tan h (2\pi H/L)}$$

Para se entender a dependência de c sobre L, devemos verificar os valores de $\tan h (x)$ com $\frac{x}{L}$.

Dessa tabela, podemos tirar duas conclusões importantes:

(H)	(H)	$\frac{x}{2\pi} = \frac{H}{L}$
X	$\tan h (X)$	
.06283	.06274	.01
.12566	.12500	.02
.18849	.18629	.03
.25133	.24616	.04
.31416	.30421	.05
.37699	.36009	.06
.62830	.55688	.1
1.2566	.85012	.2
1.8849	.95493	.3
2.5133	.98696	.4
3.1416	.99627	.5
3.7699	.99894	.6

1 – quando $h/L > .4$, $\tan h H \cong 1$ e neste caso $c = U \pm \sqrt{gL/2\pi}$ corresponde a velocidade de fase de ondas se propagando em oceano fundo.

2 – quando $h/L < .04$, $\tan h(H) \cong H$ e neste caso, $c = U \pm \sqrt{gH}$ corresponde a velocidade de propagação das ondas longas em águas rasas (Shallow Water Waves). Note-se que nesse caso c é mais ou menos independente de L , as ondas desse tipo são não-dissipativas.

Nos dois casos as ondas são neutras.

6.3 - Ondas de Gravidade Internas

Nos oceanos, que são limitados nas partes superiores e inferiores, ondas de gravidade se propagam principalmente na horizontal desde que verticalmente elas se refletiriam nos contornos para formar ondas estacionárias.

Contudo, em um fluido como a atmosfera, onde não há limite superior ondas internas de gravidade podem propagar verticalmente tanto quanto horizontalmente. Muito embora ondas internas de gravidade propagando verticalmente não sejam importantes para as previsões de curto-prazo em escala sinótica (e verdadeiramente elas não existem nos modelos “filtrados” quase-geostróficos) elas são responsáveis pela ocorrência das ondas de sotavento das montanhas (LEE WAVES). Acredita-se também que essas ondas sejam mecanismo importante no transporte de energia e momentum para os altos níveis da atmosfera, e são freqüentemente associadas à formação das chamadas “turbulências de céu claro (CAT, do inglês Clear Air Turbulence). Para analisar as propriedades das ondas de gravidade internas à atmosfera é conveniente escrever as equações para as perturbações em um sistema de coordenadas no qual a coordenada vertical é proporcional ao logaritmo da pressão. Neste sistema, como nos sistema isobárico, a densidade não aparece explicitamente. O parâmetro de estabilidade estática é aproximadamente constante com a altura nesse sistema. Então, o sistema logaritmo da pressão reúne algumas das melhores características dos outros sistemas de coordenadas utilizadas.

Nesse sistema a coordenada vertical é definida como

$$z^* = -H \ln \frac{p}{p_0} \quad (3.36)$$

Sendo $H = \frac{RT_0}{g}$ uma escala característica de altura.

A velocidade vertical é definida então:

$$w^* = \frac{dz^*}{dt} \quad (3.37)$$

A equação do movimento fica então:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V} + f\mathbf{k} \times \mathbf{V} = -\nabla\phi \quad (3.38)$$

sendo que o operador $\frac{d}{dt}$ é agora definido

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_H \cdot \nabla + w^* \frac{\partial}{\partial z^*}$$

A equação hidrostática

$$\frac{\partial\phi}{\partial \ln p} = RT$$

dividindo por $-H$:

$$\frac{\partial\phi}{\partial z^*} = \frac{RT}{H} \quad (3.39)$$

A equação da continuidade pode ser obtida da equação no sistema isobárico.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$$

mas

$$z^* = -H \ln \frac{p}{p_0} \quad \text{e} \quad w^* = \frac{dz^*}{dt} = -\frac{H}{p} \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{H}{p} \omega$$

e,

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{pw^*}{H} \right) = \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} \quad (3.40)$$

então a equação da continuidade fica:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} - \frac{w^*}{H} = 0 \quad (3.41)$$

Para a equação termodinâmica, temos:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\alpha}{C_p} \frac{dp}{dt} = \frac{Q}{C_p} \qquad \frac{dp}{dt} = - \frac{p}{H} w^*$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_H \cdot \nabla T + w^* \frac{\partial T}{\partial z^*} + \frac{\alpha}{C_p} (p/H) w^* = \frac{Q}{C_p}$$

ou

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V_H \cdot \nabla T + w^* \Gamma = \frac{Q}{C_p} \tag{3.42}$$

onde

$$\Gamma = \frac{\partial T}{\partial z^*} + \frac{RT}{C_p H} \text{ desde que } p\alpha = RT, \Gamma \text{ é aproximadamente constante como já}$$

dissemos. Temos agora nosso sistema de equações nesse sistema, formado pelas equações, 3.38, 3.39, 3.40, 3.41 e 3.42.

Vamos tomar como estado básico um estado tal no qual $u = U = \text{constante}$, $V = 0$, $W = 0$ e nas perturbações $v' = 0$ isto é, movimento no plano x, z^* .

As equações do movimento para tal, fica:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \tag{3.43}$$

continuidade

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w^{*'}}{\partial z^*} - \frac{w^{*'}}{H} = 0 \tag{3.44}$$

Termodinâmica

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) + U \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) + w^{*'} S = 0 \tag{3.44a}$$

$$\text{onde } T' = \frac{H}{R} \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \quad \text{e } S = \frac{R\Gamma}{H}$$

Temos então nosso sistema linearizado desde que $\bar{u} = \cos t$.

Vamos então tentar eliminar u' e w^* , para ficar com uma equação para a perturbação no geopotencial ϕ' . Depois então podemos voltar a esse sistema e obter informações sobre a estrutura das perturbações u' e w^* .

Usando 3.44, podemos re-arranjar:

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) w^* = 0 \quad (3.45)$$

aplicando esse operador $\left(\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right)$ na equação da termodinâmica:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) + w^* S = 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) + S \left(\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) w^* = 0 \quad (3.46)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^{*2}} - \frac{1}{H} \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) - S \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

onde

$$-\frac{\partial u'}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{1}{H} \right) w^* \text{ veio de 3.45}$$

a equação 3.43 re-arranjando, dá:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0$$

logo fazendo $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)$ da equação (3.47), podemos então eliminar u' , ficamos

então

com:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^{*2}} - \frac{1}{H} \frac{\partial \phi'}{\partial z^*} \right) + S \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi'}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.48)$$

porque

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) u' = -\frac{\partial \phi'}{\partial x}, \text{ de 3.43}$$

então nossa próxima etapa ser supor uma estrutura tipo onda para as perturbações ϕ' e determinar as amplitudes das oscilações por exemplo, supondo:

$$\phi' = A(z^*) e^{i(kx - \nu t)} \quad (3.49)$$

onde

$$k = \frac{2\pi}{L}; \frac{\nu}{k} = c$$

velocidade de fase da onda; substituindo 3.49 e 3.48 obteremos uma equação para a estrutura de $A(z^*)$ em z^* , obtendo:

$$\frac{d^2 A}{dz^{*2}} - \frac{1}{H} \frac{dA}{dz^*} + \frac{S}{(U - \nu/k)^2} = 0 \quad (3.50)$$

A solução geral dessa equação é do tipo:

$$(A)z^* = e^{z^*/2H} (c_1 e^{-i\lambda z^*} + c_2 e^{i\lambda z^*}) \quad (3.51)$$

$$\text{com } \lambda = \left| \frac{S}{(U - \nu/k)^2} - \frac{1}{4H^2} \right|^{1/2} \text{ é n.º de onda vertical} \quad (3.52)$$

então a perturbação no geopotencial é escrita:

$$\phi' = e^{z^*/2H} (c_1 e^{-i\lambda z^*} + c_2 e^{i\lambda z^*}) e^{i(kx - \nu t)}$$

ou re-arranjando:

$$\phi' = [(c_1 e^{i(kx - \lambda z^* - \nu t)} + c_2 e^{i(kx + \lambda z^* - \nu t)})] e^{z^*/2H} \quad (3.53)$$

c_1 e c_2 são constantes que devem ser determinadas pelas condições de contorno.

Se supomos que k, λ e ν são todos positivos, então o primeiro termo da direita em 3.52 corresponde a uma onda cuja velocidade da fase tem um componente para baixo (ou seja, na direção dos z^* negativos), enquanto a segunda tem a componente para cima.

Se desejamos conhecer a estrutura das perturbações u' e w' , podemos substituir a solução 3.53 nas equações 3.47 e 3.45 e obter informações sobre essas perturbações.

6.4 - Ondas de Sotavento - Lee Waves

Quando ar é forçado a escoar sobre montanhas sob condições de estabilidade estática, parcelas de ar são deslocadas de suas posições de equilíbrio e oscilarão sob influência de forças buoyancy (flutuação) à medida que movem-se ao longo da montanha (Fig. 3.6).

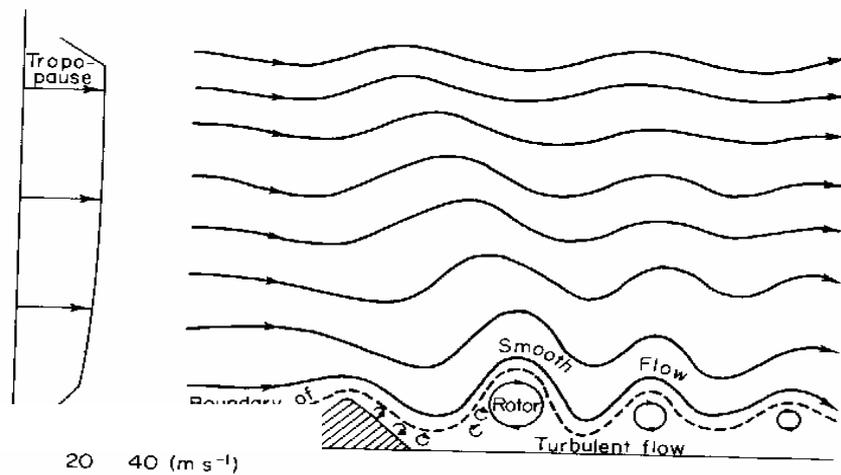


Fig. 3.6 - Diagrama mostrando linhas de corrente baseado em ondas de sotavento (Lee waves) observadas. O perfil do vento é mostrado à esquerda.

Desta maneira, um sistema de ondas de gravidade interna é induzido à sotavento da montanha estacionário com relação ao solo. Se o movimento vertical é intenso bastante e dependendo das condições de umidade, condensação pode ocorrer dando origem a um tipo de nuvem característica chamado nuvem de onda (cloud wave).

Desde que, ondas de sotavento (Lee waves) são estacionárias com relação ao solo, $c = 0$, e da equação 3.52 nós encontramos que:

$$\lambda = \left| \frac{S}{U^2} - \frac{1}{4H^2} \right|^{1/2} = \frac{|S|^{1/2}}{U} \quad (3.54)$$

Então o comprimento de onda vertical da onda de gravidade induzida pelo escoamento zonal sobre uma montanha é proporcional à velocidade zonal do vento e inversamente proporcional à raiz quadrada da estabilidade.

6.5 - Ondas Planetárias – Ondas de Rossby

As características ondulatórias observadas na atmosfera quando vistas em grande escala, são chamadas *ondas planetárias*. As que aparecem mais simples são devidas a variação do parâmetro de Coriolis com a latitude (chamado efeito β) e são chamadas *ondas de Rossby*.

Para estudar esse tipo particular de onda, vamos supor uma atmosfera com densidade constante onde flui um vento zonal com velocidade constante \underline{U} e sem variação vertical (i.e. $V = 0, W = 0$)

As equações que governam os movimentos nessa atmosfera, são:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - fv = 0 \quad (3.55a)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + fu = 0 \quad (3.55b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.55c)$$

fazendo a diferenciação cruzada $\frac{\partial}{\partial y}$ (a) e $\frac{\partial}{\partial x}$ (b) e subtraindo (b) - (a), temos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} - f \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + f \frac{\partial u}{\partial x} + U \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Subtraindo:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

o segundo termo da esquerda é nulo equação 3.55c e o primeiro é igual a $\frac{d}{dt} \zeta$ (vorticidade relativa). Temos então:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \zeta + v \frac{df}{dy} = 0 \quad (3.57)$$

desde que \underline{f} é função de \underline{y} somente.

(equação da vorticidade barotrópica)

Aplicando a teoria das perturbações e definindo uma função corrente ψ como segue:

$$u' = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad e \quad v' = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

podemos ver de 3.56 que: $\zeta' = \nabla^2 \psi$ então temos:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (3.58)$$

na qual,

$$\beta = \frac{df}{dy}$$

supondo para ψ' uma estrutura de onda do tipo:

$$\psi' = A e^{i\mu(x-ct)} \cdot \cos my \quad (3.59)$$

$\underline{\mu}$ é o comprimento de onda latitudinal, c é a velocidade de fase e \underline{m} é o número de onda latitudinal. Substituindo 3.59 em 3.58, eliminando os termos semelhantes e agrupando, temos:

$$(-ikc + ikU)(-k^2 - m^2) + ik\beta = 0$$

lembrando que $k = \frac{\mu}{c}$ e resolvendo essa equação para \underline{c} nos vemos que 3.59 será solução de 3.58 se:

$$c = U - \frac{\beta}{k^2 + m^2} \quad (3.60)$$

Verifica-se por essa solução que as ondas de *Rossby* se propagam em sentido contrário à corrente *Zonal*. Como a velocidade de fase aumenta com o comprimento de onda, elas são do tipo *dispersivas*.

4ª. PARTE – DESENVOLVIMENTO E MOVIMENTO DE SISTEMAS SINÓTICOS DE LATITUDES MÉDIAS

Presentemente, aceita-se que os distúrbios baroclínicos de escala sinótica nas médias latitudes são iniciados como resultado de uma *instabilidade hidrodinâmica* da corrente zonal básica com respeito a pequenas perturbações do escoamento. Nesta secção examina-se esta hipótese de instabilidade para origem das ondas baroclínicas e as conversões de energia envolvidas no desenvolvimento de tais ondas. Examina-se também brevemente o desenvolvimento de frentes em associação com os distúrbios sinóticos.

1 – INSTABILIDADE HIDRODINÂMICA

O conceito de instabilidade hidrodinâmica pode ser qualitativamente entendido considerando-se o movimento de uma parcela individual de fluido em uma corrente zonal em estado permanente. O primeiro conceito de instabilidade já foi visto através do *método da parcela*. Este método pode ser generalizado, supondo-se que o deslocamento da parcela se efetua em uma direção arbitrária. Se o estado básico é estavelmente estratificado e a corrente zonal tem cisalhamentos horizontal e vertical, a análise se torna bem complicada. Entretanto, se a parcela é deslocada horizontalmente através do escoamento básico, então a força de buoyancy não desempenha qualquer papel. Este caso especial, chamado de instabilidade inercial, pode ser analisado muito simplesmente se o escoamento básico é suposto ser geostrófico.

Se designamos o escoamento do estado básico por

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

e supomos que o deslocamento da parcela não perturba o campo da pressão, as equações aproximadas para o movimento se tornam,

$$\frac{du}{dt} = fv = f \frac{dy}{dt} \quad (4.1)$$

$$\frac{dv}{dt} = fu = f(u_g - u) \quad (4.2)$$

Considera-se uma parcela que está se movimentando com o estado básico geostrófico em uma posição $y = y_0$. Se a parcela é deslocada através da corrente de uma distância δy , pode-se obter sua nova velocidade zonal pela integração da equação (4.1) :

$$u(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + f\delta y \quad (4.3)$$

O vento geostrófico em $(y_0 + \delta y)$ pode ser aproximado como,

$$u_g(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y \quad (4.4)$$

Substituindo-se (4.3) e (4.4) em (4.2), obtém-se

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2(\delta y)}{dt^2} = -f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \delta y \quad (4.5)$$

Esta equação é matematicamente idêntica àquela para o deslocamento vertical de uma parcela em uma atmosfera estável, estaticamente. A depender do sinal do coeficiente do termo do lado direito em (4.5), a parcela ou será forçada a voltar a sua posição de origem ou será acelerada mais ainda a partir daquela posição. No Hemisfério Norte, onde f é positivo e a condição de estabilidade inercial se torna,

$$f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \begin{cases} > 0 \text{---> } \textit{estavel} \\ = 0 \text{---> } \textit{neutra} \\ < 0 \text{---> } \textit{instavel} \end{cases} \quad (4.6)$$

Desde que $f - \frac{\partial u_g}{\partial y}$ é a vorticidade absoluta do escoamento básico, a condição de estabilidade inercial é simplesmente que a vorticidade absoluta seja positiva. Observações indicam que na escala sinótica, a vorticidade absoluta é quase sempre positiva. A ocorrência de uma vorticidade absoluta negativa sobre qualquer grande área, seria esperado deflagrar imediatamente movimentos inercialmente instáveis que misturariam o fluido

lateralmente e reduziriam o cisalhamento até que a vorticidade absoluta fosse novamente positiva. Este mecanismo é chamado de instabilidade inercial desde que, quando visto em um sistema de referência absoluto, a instabilidade resulta de um desequilíbrio entre as forças do gradiente da pressão e de Coriolis (que é inercial), para uma parcela deslocada radialmente em um vórtice assimétrico. Instabilidades inercial e estática são apenas duas formas de instabilidade hidrodinâmica. Em geral, um escoamento básico sujeito a perturbações arbitrárias, pode estar submetido a uma variedade de modos de instabilidades que depende dos cisalhamentos horizontal e vertical, da estabilidade estática, da variação do parâmetro de Coriolis, da influência do atrito,etc. Em alguns poucos casos, o critério simples da parcela dá um critério de estabilidade satisfatório.

Geralmente, uma aproximação mais rigorosa é necessária, na qual, uma versão linearizada das equações governantes é analisada, para determinar as condições sob as quais, as soluções descrevem os distúrbios amplificando. Uma aproximação usual é supor uma solução tipo onda da forma

$$e^{ik(x - ct)}$$

e determinar as condições para as quais a velocidade de fase \underline{c} tem uma parte imaginária. Esta técnica, que é chamada de *método dos modos normais*, será aplicada na próxima secção para analisar a instabilidade baroclínica.

4.2 - Instabilidade Baroclínica: Ciclogênese

O desenvolvimento de distúrbios de tempo de escala sinótica é frequentemente mencionado como ciclogênese. O processo de ciclogênese será considerado aqui como uma manifestação da amplificação de uma perturbação infinitesimal sobreposta a uma corrente zonal instável. Para uma perturbação amplificar está claro que o escoamento básico deve ceder energia potencial ou cinética para a perturbação. Nas latitudes médias instabilidade baroclínica é o mais importante processo ciclogenético. Na instabilidade baroclínica por sua vez, como mostra-se adiante, a energia potencial do escoamento básico é convertida para energia potencial e cinética da perturbação.

Vamos derivar a condição para haver instabilidade baroclínica a partir do modelo quase-geostrófico a dois níveis. Este modelo certamente super simplifica a estrutura vertical dos sistemas baroclínicos, mas ele contém as características essenciais necessárias para um entendimento qualitativo da instabilidade baroclínica.

As equações básicas deste modelo são:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_1 + V_1 \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_1 + f) = \frac{f_0}{\Delta p} \omega_2 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi_3 + V_3 \cdot \nabla (\nabla^2 \psi_3 + f) = \frac{f_0}{\Delta p} \omega_2 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_1 - \psi_3) + V_2 \cdot \nabla (\psi_1 - \psi_3) = \frac{\sigma \cdot \Delta p}{f_0} \omega_2 \quad (4.9)$$

nas quais, $V_j = kx \nabla \psi_j$ para $j = 1, 2, 3$.

O re-arranjo destas variáveis na vertical é mostrado na figura 4.1.

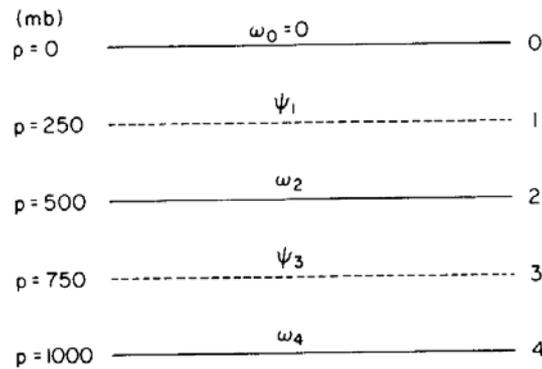


Figura 4.1 - Arranjo vertical das variáveis do modelo baroclínico a dois níveis

Para manter a análise tão simples quanto possível supõe-se que as funções de corrente ψ_1 e ψ_3 consistem de uma parte do estado básico que depende linearmente de y somente mais perturbações que dependem de \underline{x} e \underline{t} . Então temos,

$$\begin{aligned} \psi_1 &= -\bar{u}_1 y + \psi_1'(x, t) \\ \psi_3 &= -\bar{u}_3 y + \psi_3'(x, t) \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\omega_2 = \omega'_2$$

as velocidades zonais nos níveis 1 e 3, são respectivamente \bar{u}_1 e \bar{u}_3 . Então, o campo das perturbações tem componentes de velocidade meridional e vertical somente. Substituindo a partir de (4.10) no conjunto de equações de (4.7) a (4.9) e linearizando, obtém-se as equações das perturbações,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1' + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_1' = \frac{f_0}{\Delta p} \omega_2' \quad (4.11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_3 \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_3' + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi_3' = \frac{f_0}{\Delta p} \omega_2' \quad (4.12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) (\psi_1' - \psi_3') - \left(\frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_3}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1' + \psi_3') = \frac{\sigma \Delta p}{f_0} \omega_2' \quad (4.13)$$

Aqui foi usada a aproximação do plano beta, $\beta = \frac{df}{dy}$, interpolou-se linearmente para expressar V_2 em termos de ψ_1' e ψ_3' . As equações de (4.11) a (4.13) são um conjunto linear em ψ_1' , ψ_3' e ω_2' . Como já visto antes, vamos supor solução do tipo onda,

$$\psi_1' = Ae^{ik(x-ct)} \quad ; \quad \psi_3' = Be^{ik(x-ct)} \quad ; \quad \omega_2' = Ce^{ik(x-ct)} \quad (4.14)$$

Substituindo essas soluções no sistema de equações de (4.11) a (4.13), encontramos que as amplitudes A, B e C devem satisfazer ao seguinte conjunto linear de equações algébricas simultâneas, homogêneas:

$$ik[(c - \bar{u}_1)k^2 + \beta]A - \frac{f_0}{\Delta p}C = 0 \quad (4.15)$$

$$ik[(c - \bar{u}_3)k^2 + \beta]B + \frac{f_0}{\Delta p}C = 0 \quad (4.16)$$

$$-ik(c - \bar{u}_3)A + ik(c - \bar{u}_1)B - \frac{\sigma \Delta p}{f_0}C = 0 \quad (4.17)$$

Desde que este conjunto é homogêneo, soluções não-triviais existirão somente se o determinante dos coeficientes de A, B e C seja nulo. Então, nós queremos que a velocidade de fase \underline{c} satisfaça a :

$$\begin{bmatrix} ik[(c - \bar{u}_1)k^2 + \beta] & 0 & -\frac{f_0}{\Delta p} \\ 0 & ik[(c - \bar{u}_3)k^2 + \beta] & \frac{f_0}{\Delta p} \\ -ik(c - \bar{u}_3) & ik(c - \bar{u}_1) & -\frac{\sigma \Delta p}{f_0} \end{bmatrix} = 0$$

resolvendo o determinante, obtemos uma equação quadrática em c :

$$\begin{aligned} & (k^4 + 2\lambda^2 k^2)c^2 + [2\beta(k^2 + \lambda^2) - (\bar{u}_1 + \bar{u}_3)(k^4 + 2\lambda^2 k^2)]c \\ & + [k^4 \bar{u}_1 \bar{u}_3 + \beta^2 - (\bar{u}_1 + \bar{u}_3)(k^2 + \lambda^2)\beta + \lambda^2 k^2 (\bar{u}_3^2 + \bar{u}_1^2)] = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde foi posto que $\lambda^2 \equiv \frac{f_0^2}{(\sigma \Delta p)^2}$. De uma forma alternativa, (4.18) poderia também ser obtida pela eliminação de qualquer das duas variáveis A, B ou C entre as equações (4.15) a (4.17). Resolvendo (4.18) para a velocidade de fase \underline{c} obtém-se,

$$c = u_m - \frac{\beta(k^2 + \lambda^2)}{k^2(k^2 + 2\lambda^2)} \pm \delta^{1/2} \quad (4.19)$$

na qual,

$$\delta \equiv \frac{\beta^2 \lambda^4}{k^4 (k^2 + 2\lambda^2)^2} - \frac{u_T^2 (2\lambda^2 - k^2)}{(k^2 + 2\lambda^2)}$$

e,

$$u_m = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_3}{2}, \quad u_T = \frac{\bar{u}_1 - \bar{u}_3}{2}$$

Então, u_m e u_T são respectivamente, o vento zonal mediado verticalmente e o vento térmico do estado básico para o intervalo $\frac{\Delta p}{2}$. Mostra-se que as equações (4.14) são soluções do sistemas (4.11) a (4.13) somente se a velocidade de fase satisfaz a relação (4.19). Essa equação é uma expressão muito complicada. Contudo, pode-se notar rapidamente que se $\delta < 0$, a velocidade de fase terá uma parte imaginária, as perturbações amplificarão exponencialmente e a instabilidade ocorrerá. Antes de se analisar a solução (4.19) mais detalhadamente, consideramos primeiros dois casos especiais: O primeiro caso, com estado básico barotrópico, $u_T = 0$ e a solução (4.19) terá duas raízes,

$$c_1 = u_m - \frac{\beta}{k^2} \quad (4.20)$$

$$c_2 = u_m - \frac{\beta}{(k^2 + 2\lambda^2)} \quad (4.21)$$

ambas são soluções. Estas são quantidades reais que correspondem a oscilações livres (modos normais) para o modelo a dois níveis com uma corrente básica barotrópica. A velocidade de fase c_1 é simplesmente uma relação de dispersão para uma onda de Rossby barotrópica independente de y . Substituindo esta relação para c no sistema (4.15) a (4.17), vemos que, neste caso, $A=B$ e $C=0$, tal que as perturbações também são barotrópicas. A última expressão (4.21) por outro lado, pode ser interpretada como a velocidade de fase para uma onda baroclínica interna de Rossby. Note que c_2 é uma relação de dispersão análoga à relação para uma onda de Rossby em um oceano homogêneo com uma superfície livre, porém com o fator $2\lambda^2 \equiv \frac{2f_0^2}{\sigma \Delta p^2}$ no denominador em lugar do fator $\frac{f_0^2}{gH}$ para o caso oceânico. Em cada um desses casos, existe um movimento vertical associado com uma onda de Rossby, tal que a estabilidade estática modifica a velocidade da onda. Como um segundo caso especial, supomos que $\beta = 0$. Este caso corresponde, por exemplo a uma situação de laboratório na qual o fluido é limitado acima e abaixo por planos girantes tal que os vetores gravidade e rotação são sempre paralelos. Em tal uma situação,

$$c = u_m \pm u_T \left(\frac{k^2 - 2\lambda^2}{k^2 + 2\lambda^2} \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

Para ondas com comprimento de onda zonal satisfazendo $k^2 < 2\lambda^2$, esta solução tem uma parte imaginária. Então, todas ondas maiores que o comprimento de onda crítico $L_c = \sqrt{2\pi/\lambda}$ amplificará. A partir da definição de λ pode-se escrever,

$$L_c = \Delta p \pi (2\sigma)^{1/2} / f_0$$

Agora para condições troposféricas típicas, $(2\sigma)^{1/2} \cong 2 \times 10^{-3} N^{-1} m^3 s^{-1}$. Então, com $\Delta p = 50 kPa$ e $f_0 = 10^{-4} s^{-1}$ nós encontramos que $L_c \cong 3000 km$. Fica claro, a partir desta fórmula, que o comprimento de onda crítico para a instabilidade baroclínica aumenta com a estabilidade estática. O papel da estabilidade estática é estabilizar os comprimentos de onda menores que o comprimento crítico L_c .

É também de interesse que com $\beta = 0$ o critério para instabilidade não depende da magnitude do vento térmico do estado básico u_T . Todos comprimentos de onda maiores que L_c são instáveis mesmo para pequenos valores do cisalhamento vertical. Entretanto, a taxa de crescimento da perturbação realmente depende de u_T . A partir de (4.14) nós vemos que a taxa de crescimento exponencial é $\alpha = k c_i$, onde c_i designa a parte imaginária da velocidade de fase. Neste caso,

$$\alpha = k u_T \left(\frac{2\lambda^2 - k^2}{2\lambda^2 + k^2} \right)^{1/2} \quad (4.23)$$

tal que a taxa de crescimento aumenta linearmente com o vento térmico médio.

Retornando ao caso geral, onde todos os termos são retidos na equação (4.19), o critério de estabilidade é mais facilmente entendido pelo cálculo da chamada *curva neutra* que conecta todos os valores de u_T e k para os quais $\delta = 0$ tal que o escoamento é *marginalmente estável*.

A partir da equação (4.19), a condição $\delta = 0$ que,

$$\frac{\beta^2 \lambda^4}{k^4 (k^2 + 2\lambda^2)} = u_T^2 (2\lambda^2 - k^2) \quad (4.24)$$

Esta relação complicada entre u_T e k pode ser melhor apresentada pela solução de (4.24), resolvendo para $\frac{k^4}{2\lambda^4}$, achamos:

$$\frac{k^4}{2\lambda^4} = 1 \pm \left[1 - \frac{\beta^2}{4\lambda^4 u_T^2} \right]^{1/2}$$

Na figura 4.2, a quantidade adimensional $\frac{k^4}{2\lambda^4}$ que é uma medida do comprimento de onda zonal, é plotada contra o parâmetro adimensional $\frac{2\lambda^2 u_T}{\beta}$ que é proporcional ao vento térmico. Como indicado na figura, a curva neutra separa a região instável do plano u_T, k da região estável.

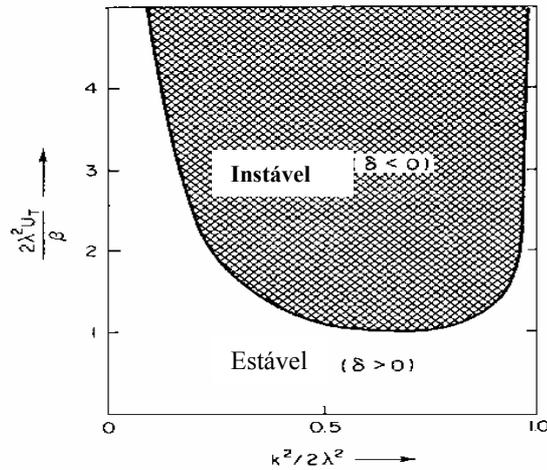


Figura 4.2 – Curva neutra de estabilidade para o modelo baroclínico a dois níveis.

2- A ENERGÉTICA DAS ONDAS BAROCLÍNICAS

Como já foi visto em secções anteriores, sob condições apropriadas uma corrente básica que contém um cisalhamento vertical será instável para pequenas perturbações. Tais perturbações podem então crescer exponencialmente se recebem energia potencial e/ou cinética do escoamento médio. Nesta secção, analisa-se a energética dos distúrbios baroclínicos linearizados e mostra-se que estas perturbações podem crescer pela conversão de energia potencial do escoamento médio.

2.1– Energia potencial disponível

Antes de discutir a energética das ondas baroclínicas, é necessário considerar a energia da atmosfera de um ponto de vista mais geral. Para fins práticos, a energia total da atmosfera é a soma das *energias interna, potencial gravitacional e cinética*. Entretanto, não é necessário considerar separadamente as variações das energias interna e potencial gravitacional porque em uma atmosfera hidrostática, essas duas formas de energia são proporcionais entre si e podem ser combinadas em um único termo chamado *energia potencial total*. Essa proporcionalidade pode ser mostrada, simplesmente considerando-se estas formas de energia para uma coluna de ar de seção unitária que se estende desde a superfície até o topo da atmosfera. Se designamos por dE_1 a energia interna de uma seção vertical da coluna de altura dz , então a partir da definição de energia interna,

$$dE_1 = \rho c_v T dz$$

tal que a energia interna da coluna inteira é :

$$E_I = c_v \int_0^{\infty} \rho T dz \quad (4.27)$$

por outro lado, a energia potencial gravitacional para uma fatia de espessura dz a uma altura z é exatamente

$$dE_p = \rho g z dz$$

tal que a energia potencial gravitacional da coluna inteira é:

$$E_p = \int_0^{\infty} \rho g z dz = - \int_{p_0}^0 z dp \quad (4.28)$$

aqui foi usada a equação da hidrostática para se obter a relação (4.28). Integrando esta relação por partes e usando a lei dos gases ideais obtém-se

$$E_p = \int_0^{\infty} p dz = R \int_0^{\infty} \rho T dz \quad (4.29)$$

comparando as equações (4.27) com (4.29), vê-se que

$$c_v E_p = R E_I$$

então, a energia potencial total pode ser expressa como

$$E_p + E_I = \frac{c_p}{c_v} E_I = \frac{c_p}{R} E_p \quad (4.30)$$

Conseqüentemente, em uma atmosfera hidrostática a energia potencial total pode ser obtida pelo cálculo de E_I ou E_p somente.

A energia potencial total não é uma medida muito apropriada da energia na atmosfera porque uma fração muito pequena da energia potencial total está disponível para conversão para energia cinética dos distúrbios. Para entender qualitativamente porque a maioria da energia potencial total não está disponível, considera-se um modelo simples que consiste inicialmente de duas massas de ar seco separadas por uma parede vertical como mostrado na figura 4.3, abaixo:

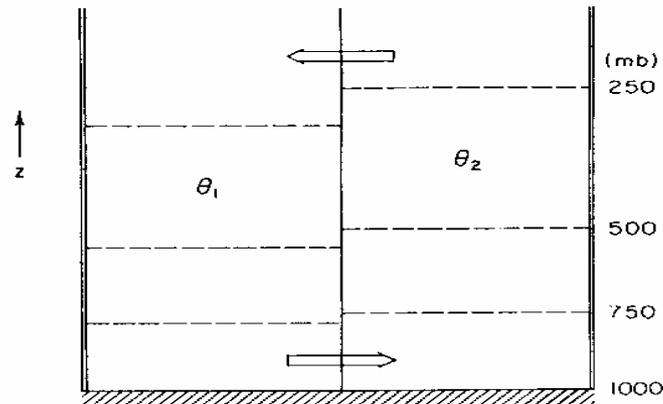


Figura 4.3 - Duas massas de ar de diferentes temperaturas potenciais, separadas por uma parede vertical.

As duas massas de ar tem temperaturas potenciais uniformes θ_1 e θ_2 , respectivamente, com $\theta_1 < \theta_2$. A pressão ao nível do chão em cada um dos lados da parede é tomada como sendo 1000 mb. Desejamos agora calcular a energia cinética máxima que pode ser realizada por um rearranjo adiabático de massa dentro do mesmo volume quando a separação é removida. Agora para um processo adiabático, a energia total deve ser conservada:

$$E_c + E_p + E_I = \text{const.}$$

onde E_c é a energia cinética. Se as massas de ar estão inicialmente em repouso, $E_c = 0$. Então, se denotamos com “linha” as quantidades do estado final, devemos ter,

$$E'_c + E'_p + E'_I = E_p + E_I$$

tal que, com a ajuda da equação (4.30), encontramos que a energia cinética realizada pela remoção da parede é:

$$E'_c = \frac{c_p}{c_v} (E_I - E'_I)$$

desde que θ é conservada em processo adiabático, nenhuma mistura é permitida. É claro que E'_I será um mínimo (designado por E''_I) quando as massas são re-arranjadas de modo que o ar com θ_1 está inteiramente em baixo do ar com θ_2 , com a superfície de 500mb como fronteira horizontal entre as duas massas. Nesse caso, a energia potencial total $\frac{c_p}{c_v} E''_I$ não está disponível para conversão para energia cinética porque nenhum processo adiabático pode mais reduzir E''_I . A energia potencial disponível, pode agora ser definida como a diferença entre a energia potencial total de um sistema fechado e a

energia potencial total mínima que poderia resultar de uma redistribuição adiabática de massa. Então, para o modelo idealizado que estamos usando,

$$P \equiv \frac{c_p}{c_v} (E_I - E_I'') \quad (4.31)$$

que é equivalente à máxima energia cinética que pode ser realizada por um processo adiabático.

Lorenz (1960) mostrou que para a atmosfera terrestre, a energia potencial disponível é dada aproximadamente pela integral de volume sobre toda a atmosfera, da variância da temperatura potencial sobre superfícies isobáricas. Então, fazendo $\bar{\theta}$ designar a temperatura potencial média para uma dada superfície e θ' o desvio local dessa média, a energia potencial disponível média por unidade de volume, satisfaz a proporcionalidade,

$$\bar{P} = \frac{1}{V} \int \frac{\bar{\theta}'^2}{\bar{\theta}^2} dV$$

na qual V designa o volume total. Para o modelo quase-geostrófico, esta proporcionalidade é uma mediada exata energia potencial disponível, como será mostrado em seções subseqüentes. Observações indicam que para a atmosfera como um todo,

$$\frac{\bar{P}}{(c_p/c_v) \bar{E}_I} \sim \frac{1}{200}, \quad \frac{\bar{K}}{\bar{P}} \approx \frac{1}{10}$$

o que equivale dizer que somente cerca de 0.5% da energia potencial total da atmosfera está disponível e da porção disponível apenas 10% é realmente convertida para energia cinética. A partir deste ponto de vista, a atmosfera é uma *máquina térmica muito ineficiente*.

3 – EQUAÇÕES DA ENERGIA PARA O MODELO A DOIS NÍVEIS QUASE-GEOSTRÓFICO LINEARIZADO

No nosso modelo a dois níveis o campo da perturbação na temperatura é proporcional a $\psi'_1 - \psi'_3$, a espessura da camada 250 – 750 mb. Então, na discussão da seção anterior foi antecipado que a energia potencial disponível neste caso é proporcional a $(\psi'_1 - \psi'_3)^2$. Para mostrar que este de fato é o caso, deriva-se as equações da energia para o sistema (4.11) a (4.13) da seguinte maneira: primeiro multiplica-se (4.11) por $-\psi'_1$, a equação (4.12) por $-\psi'_3$ e a equação (4.13) por $\psi'_1 - \psi'_3$. Integra-se as equações resultantes sobre um comprimento de onda da perturbação na direção zonal. Os termos zonalmente mediados, serão denotados pela notação dos parêntesis angulosos.

$$\langle () \rangle = \frac{1}{L} \int_0^L () dx$$

Onde o L é o comprimento de onda da perturbação. Então, para o primeiro termo na equação (4.11), temos após multiplica-lo por $-\psi'_1$:

$$\begin{aligned} -\left\langle \psi'_1 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial x^2} \right) \right\rangle &= -\left\langle \psi'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial t} \right) \right\rangle \\ &= -\left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi'_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial t} \right) \right] \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \right) \right\rangle \\ &\quad \text{A} \qquad \qquad \qquad \text{B} \end{aligned}$$

O termo A se anula porque é a integral de um diferencial perfeito em x sobre um ciclo completo. O termo B pode ser re-escrito como

$$\left\langle \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \right)^2 \right\rangle$$

que é exatamente a taxa de variação da perturbação da energia cinética por unidade de massa, média sobre um comprimento de onda. Do mesmo modo, multiplicando o termo de advecção do lado esquerdo de (4.11) por $-\psi'_1$ integrando em x e re-escrevendo,

$$\begin{aligned} -\bar{u}_1 \left\langle \psi'_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \right) \right\rangle &= -\bar{u}_1 \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left[\psi'_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \right) \right] \right\rangle + \bar{u}_1 \left\langle \frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'_1}{\partial x^2} \right\rangle \\ &= +\frac{\bar{u}_1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \psi'_1}{\partial x} \right]^2 \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

então, a advecção de energia cinética se anula quando integrada sobre um comprimento de onda. Avaliando os vários termos nas equações (4.12) e (4.13) da mesma maneira após multiplica-las por $-\psi'_3$ e $\psi'_1 - \psi'_3$ respectivamente, pode-se obter o seguinte conjunto de equações para a perturbação na energia:

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = -\frac{f_0}{\Delta p} \langle \dot{\omega}_2 \psi_1' \rangle \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi_3'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = -\frac{f_0}{\Delta p} \langle \dot{\omega}_2 \psi_3' \rangle \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} (\psi_1' - \psi_3')^2 \right\rangle = u_T \left\langle (\psi_1' - \psi_3') \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1' + \psi_3') \right\rangle + \frac{\sigma \Delta p}{f_0} \langle \dot{\omega}_2 (\psi_1' - \psi_3') \rangle \quad (4.34)$$

como antes, $u_T \equiv (\bar{u}_1 - \bar{u}_3) / 2$.

Definindo a perturbação na energia cinética como sendo a soma das energias cinéticas dos níveis de 250 e 750 mb ,

$$K' \equiv \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial \psi_3'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle$$

encontramos pela soma de (4.32) e (4.33) que

$$\frac{\partial}{\partial t} K' = -\frac{f_0}{\Delta p} \langle \dot{\omega}_2 (\psi_1' - \psi_3') \rangle \quad (4.35)$$

Então, a taxa de variação da perturbação na energia cinética é proporcional à correlação entre a perturbação na espessura e o movimento vertical. Se agora define-se a perturbação na energia potencial disponível como

$$P' = \frac{\lambda^2 \langle (\psi_1' - \psi_3')^2 \rangle}{2}$$

obtém-se a partir de (4.34)

$$\frac{dP'}{dt} = \lambda^2 u_T \left\langle (\psi_1' - \psi_3') \frac{\partial}{\partial x} (\psi_1' + \psi_3') \right\rangle + \frac{f_0}{\Delta p} \langle \dot{\omega}_2 (\psi_1' - \psi_3') \rangle \quad (4.36)$$

O último termo na equação (4.36) é exatamente igual e oposto ao termo da fonte de energia cinética na equação (4.35). Este termo claramente deve representar uma conversão entre energia cinética e potencial. Se em média, o movimento vertical é positivo ($\omega'_2 < 0$) onde a espessura é maior que a média ($\psi'_1 - \psi'_3 > 0$) e o movimento vertical é positivo onde a espessura é menor que a média, tem-se

$$\left\langle \omega'_2 (\psi'_1 - \psi'_3) \right\rangle < 0 \quad (4.37)$$

a perturbação na energia potencial está então sendo convertida para energia cinética. Fisicamente, esta correlação representa um “overturning” no qual ar quente está subindo e ar frio descendo, uma situação que claramente tende a baixar o centro de massa e então a perturbação da energia potencial. Entretanto, a energia potencial disponível e energia cinética de um distúrbio pode ainda crescer simultaneamente, uma vez que a geração de energia potencial devido ao primeiro termo da equação (4.36) excede a taxa de conversão da energia potencial para energia cinética.

O termo de geração de energia potencial em (4.36) depende da correlação entre a perturbação na espessura ($\psi'_1 - \psi'_3$) e a velocidade meridional em 500 mb, $\frac{\partial}{\partial x}(\psi'_1 + \psi'_3)$.

Para se entender o papel desse termo, é interessante considerar um caso particular de um distúrbio tipo onda senoidal. Suponha que as partes barotrópica e baroclínica do distúrbio possam ser escritos respectivamente como,

$$\begin{aligned} \psi'_1 + \psi'_3 &= A_M \cos k(x - ct) \\ \psi'_1 - \psi'_3 &= A_T \cos k \cos(x + x_0 - ct) \end{aligned} \quad (4.38)$$

aqui x_0 é uma diferença de fase. Desde que $\psi'_1 + \psi'_3$ é proporcional ao geopotencial em 500 mb e $(\psi'_1 - \psi'_3)$ é proporcional à temperatura no mesmo nível, o ângulo de fase kx_0 dá a diferença de fase entre os campos do geopotencial e da temperatura em 500 mb. Conseqüentemente, A_M e A_T são medidas das amplitudes dos distúrbios no geopotencial e temperatura nos 500 mb, respectivamente. Usando as expressões (4.38) obtém-se,

$$\begin{aligned} \left\langle (\psi'_1 - \psi'_3) \frac{\partial}{\partial x} (\psi'_1 + \psi'_3) \right\rangle &= \\ &= -\frac{k}{L} \int_0^L A_T A_M \cos k \cos(x + x_0 - ct) \sin k(x - ct) dx \\ &= \frac{k A_T A_M \sin kx_0}{L} \int_0^L [\text{sen} k(x - ct)]^2 dx \end{aligned}$$

$$= \frac{A_T A_M k \sin kx_0}{2} \quad (4.39)$$

A partir de (4.39), vê-se que para o caso usual das latitudes médias de um vento térmico de leste para oeste ($u_T > 0$) a correlação dada em (4.39) deve ser positiva se a perturbação na energia potencial vai crescer. Então, x_0 deve satisfazer a

$$0 < kx_0 < \pi$$

Conseqüentemente, a correlação será um máximo positivo para $kx_0 = \frac{\pi}{2}$ que é, quando a defasagem entre a onda da temperatura e a do geopotencial é de 90° em 500 mb. Este é o caso mostrado esquematicamente na figura 4.4 abaixo.

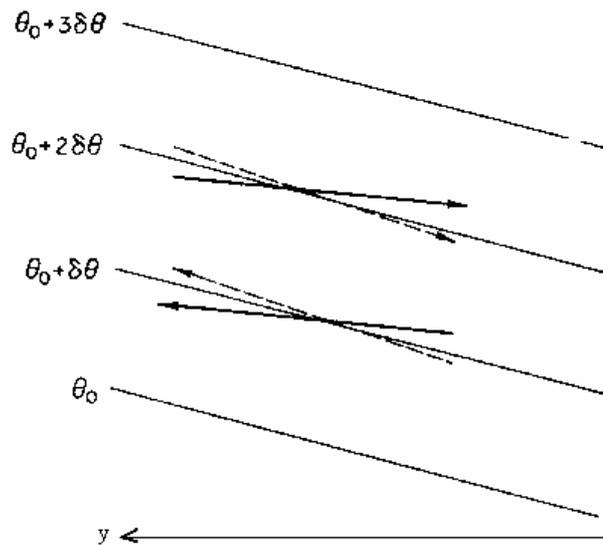


Figura 4.4 - declividades de trajetórias de parcelas relativas às superfícies de temperatura potencial média zonal para um distúrbio baroclinicamente instável (linhas com setas sólidas) e para distúrbio baroclinicamente estável (tracejadas).